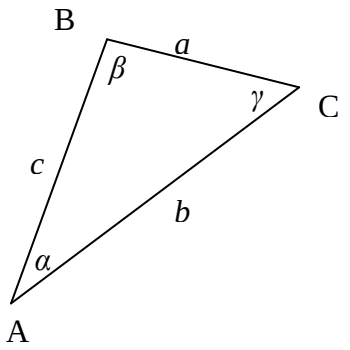
ТРЕУГОЛЬНИК



Обозначения:
Стороны a, b, c
Углы α, β, γ
Высоты h_a (из вершины A к стороне a), h_b (из вершины B к стороне b), h_c (из вершины C к стороне c)
Медианы m_a (из вершины A к стороне a), m_b (из вершины B к стороне b), m_c (из вершины C к стороне c)
Биссектрисы l_a (из вершины A к стороне a), l_b (из вершины B к стороне b), l_c (из вершины C к стороне c)

Радиус описанной окружности R
Радиус вписанной окружности r
Радиусы трех вневписанных окружностей r_a, r_b, r_c

Полупериметр $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Площадь ΔABC S

Внешние углы треугольника (смежные с соответствующим углом) θ_α, θ_β, θ_γ

- Треугольник – жесткая фигура.
- $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
- $\theta_\alpha = \beta + \gamma \qquad \theta_\beta = \alpha + \gamma \qquad \theta_\gamma = \beta + \alpha$
- Формула Регионтана $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}((\alpha+\beta)/2)}{\operatorname{tg}((\alpha-\beta)/2)} \qquad \dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{\operatorname{tg}((\alpha+\gamma)/2)}{\operatorname{tg}((\alpha-\gamma)/2)}$

  $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{\operatorname{tg}((\beta+\gamma)/2)}{\operatorname{tg}((\beta-\gamma)/2)}$
- Против равных сторон лежат равные углы
- Против большей стороны лежит больший угол
- Неравенство треугольника: $a+b>c \qquad a+c>b \qquad c+b>a$

  $c-b<a \qquad b-a<c \qquad a-c<b$
- $c^2 < a^2 + b^2$ для остроугольного треугольника, $c^2 = a^2 + b^2$ для прямоугольного треугольника, $c^2 > a^2 + b^2$ для тупоугольного треугольника
- Признаки **равенств**а (1. по двум сторонам и углу между ними 2. по стороне и прилежащим углам 3. по трем сторонам)
- Признаки **подобия** (1. по двум углам 2. по двум сторонам и углу между ними 3. по трем сторонам). Если k - коэффициент подобия, то $\dfrac{S}{S'} = k^2$. Отношение любых двух линейных элементов подобных треугольников равно k.
- Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

  $c^2 = a^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma$
- $a = c\cos\beta + b\cos\gamma \qquad b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \qquad c = a\cos\beta + b\cos\alpha$
- $\dfrac{b^2-c^2}{a} = b\cos\gamma - c\cos\beta \qquad \dfrac{c^2-a^2}{b} = c\cos\alpha - a\cos\gamma \qquad \dfrac{a^2-b^2}{c} = a\cos\beta - b\cos\alpha$

❖ $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$ $\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{p(p-b)}{ac}$ $\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{p(p-c)}{ab}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ $\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{(p-a)(p-c)}{ac}$ $\sin^2\frac{\gamma}{2}=\frac{(p-a)(p-b)}{ab}$

❖ Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$

❖ Биссектрисы пересекаются в одной точке. Точка пересечения биссектрис – центр вписанной окружности. Биссектриса – геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла. Пусть точки L_a, L_b, L_c - основания соответствующих биссектрис, тогда

$\frac{AL_c}{b}=\frac{BL_c}{a}$, $\frac{AL_b}{c}=\frac{CL_b}{a}$, $\frac{CL_a}{b}=\frac{BL_a}{c}$. $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ $r=\frac{S}{p}$

$$l_a=\sqrt{bc-BL_a\bullet L_aC}=\frac{\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}}{b+c}=\frac{2\sqrt{bc(p-a)p}}{b+c}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$l_b=\sqrt{ac-AL_b\bullet L_bC}=\frac{\sqrt{ac\left((a+c)^2-b^2\right)}}{a+c}=\frac{2\sqrt{ac(p-b)p}}{a+c}=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$l_c=\sqrt{ab-AL_c\bullet L_cB}=\frac{\sqrt{ab\left((a+b)^2-c^2\right)}}{a+b}=\frac{2\sqrt{ab(p-c)p}}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$$

❖ Медианы пересекаются в одной точке G (она называется центроидом и всегда лежит внутри треугольника). Точка пересечения медиан – центр тяжести треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины. Медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

$$m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}\qquad m_b=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}\qquad m_c=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$$

$$m_a=\sqrt{\frac{a^2}{4}+c^2-ac\cos\beta}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2-ab\cos\gamma}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\alpha}$$

$$m_b=\sqrt{\frac{b^2}{4}+c^2-bc\cos\alpha}=\sqrt{\frac{b^2}{4}+a^2-ab\cos\gamma}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\beta}$$

$$m_c=\sqrt{\frac{c^2}{4}+b^2-bc\cos\alpha}=\sqrt{\frac{c^2}{4}+a^2-ac\cos\beta}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2+2ab\cos\gamma}$$

$$\frac{|b-c|}{2}<m_a<\frac{b+c}{2}\qquad \frac{|a-c|}{2}<m_b<\frac{a+c}{2}\qquad \frac{|a-b|}{2}<m_c<\frac{a+b}{2}$$

$$a^2=\frac{4}{9}\left(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2\right)\qquad b^2=\frac{4}{9}\left(2m_a^2+2m_c^2-m_b^2\right)\qquad c^2=\frac{4}{9}\left(2m_a^2+2m_b^2-m_c^2\right)$$

Формула Лейбница-Якоби $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$$\frac{3}{2}p<m_a+m_b+m_c<2p\qquad 9r\le m_a+m_b+m_c\le\frac{9}{2}R$$

Формула Лагранжа-Лейбница. Если точка G - центроид треугольника, то для любой точки P верно: $PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2$

❖ Высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке (она называется ортоцентром).

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\qquad h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $h_a = \frac{bc}{2R}$ $h_b = \frac{ac}{2R}$ $h_c = \frac{ab}{2R}$

$h_a \le l_a \le m_a$ $h_b \le l_b \le m_b$ $h_c \le l_c \le m_c$

В любом непрямоугольном треугольнике произведение расстояний от ортоцентра до концов высот есть величина постоянная для всех трех высот этого треугольника.

- Серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке. Точка пересечения серединных перпендикуляров – центр описанной окружности. Для остроугольного треугольника эта точка лежит внутри треугольника, для прямоугольного – на гипотенузе, для тупоугольного – вне треугольника. $R = \frac{abc}{4S}$ $R = \frac{ab}{2h_c}$ $R = \frac{ac}{2h_b}$ $R = \frac{bc}{2h_a}$ $R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$
- Радиусы вневписанных окружностей $r_a = \frac{S}{p-a}$ $r_b = \frac{S}{p-b}$ $r_c = \frac{S}{p-c}$
- Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.
- $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ $S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2}$ $S = \frac{abc}{4R}$ $S = pr$

$S = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma} = \frac{a^2\sin\gamma\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}$ $S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

Формула Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$

$S = \sqrt{p_a(p_a-2m_a)(p_a-b)(p_a-c)}$ $S = \sqrt{p_b(p_b-a)(p_b-2m_b)(p_b-c)}$

$S = \sqrt{p_c(p_c-a)(p_c-b)(p_c-2m_c)}$, где $p_a = \frac{2m_a+b+c}{2}$, $p_b = \frac{a+2m_b+c}{2}$, $p_c = \frac{a+b+2m_c}{2}$

$S = ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)l_c\sqrt{4a^2b^2-(a+b)^2l_c^2}}{4ab}$

$S = ac\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{(a+c)l_b\sqrt{4a^2c^2-(a+c)^2l_b^2}}{4ac}$

$S = bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c)l_a\sqrt{4b^2c^2-(b+c)^2l_a^2}}{4bc}$

$$S = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c})}}$$

- Расстояния между центрами описанной окружности (точкой O), вписанной окружности (точкой O') и вневписанными окружностями (точки O_a, O_b, O_c). Формула Эйлера

$OO'^2 = R^2 - 2Rr$. $OO_a^2 = R^2 - 2Rr_a$ $OO_b^2 = R^2 - 2Rr_b$ $OO_c^2 = R^2 - 2Rr_c$

$O'O_a^2 = 4R(r_a - r)$ $O'O_b^2 = 4R(r_b - r)$ $O'O_c^2 = 4R(r_c - r)$

- В любом неравностороннем треугольнике ортоцентр H, центроид G и центр описанной окружности лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $\frac{HG}{OG} = \frac{2}{1}$.
- Теорема Чевы. Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке ⇔

$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

- Теорема Стюарта. Если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, то $AD^2 = AC^2 \frac{BD}{BC} + AB^2 \frac{CD}{BC} - BD \cdot CD$

- **Прямоугольный треугольник (катеты a и b, гипотенуза c, $\gamma = 90°$, c_a и c_b - проекции катетов на гипотенузу)**
- Признаки **равенства** (1. по двум катетам 2. по гипотенузе и острому углу 3. по катету и прилежащему острому углу 4. по катету и противолежащему углу 5. по гипотенузе и катету)
- Признаки **подобия** (1. по острому углу 2. по двум катетам 3. по гипотенузе и катету).
- Теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$
- $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$
- Среднее геометрическое $h = h_c = \sqrt{c_a c_b}$ $a = \sqrt{c_a c}$ $b = \sqrt{c_b c}$ $h = h_c = \frac{ab}{c}$
- $m_c = \frac{c}{2}$ $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$
- $h_c \le l_c \le m_c$ (и биссектриса делит угол между медианой и высотой пополам)
- $a + b = 2r + 2R$ $r = \frac{a + b - c}{2}$ $R = \frac{c}{2}$
- $S = \frac{ab}{2}$ $S = \frac{ch}{2}$ $S = pr$

- **Равнобедренный треугольник (боковые стороны $a = b$, основание c)**
- $\alpha = \beta$ $m_c = h_c = l_c$
- Из всех треугольников с данным основанием и периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

- **Равносторонний (правильный) треугольник ($a = b = c$)**
- $\alpha = \beta = \gamma = 60°$
- $m_a = h_a = l_a$, $m_b = h_b = l_b$, $m_c = h_c = l_c$
- $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- Из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.