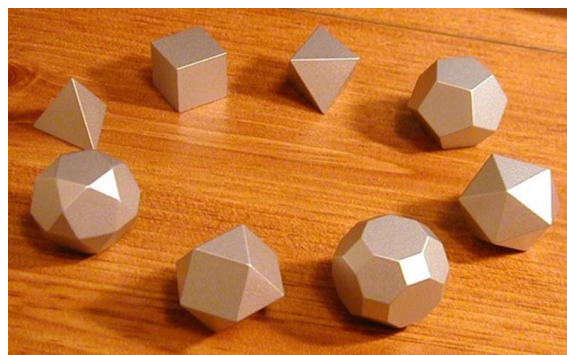




Введение в стереометрию



Базовые понятия

Планиметрия – раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости (плоских фигур).

Стереометрия – раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве (пространственных фигур).

Базовые объекты изучения: точки, прямые и плоскости.

Другие объекты изучения: поверхности и тела (это поверхность вместе с внутренней областью).

Примеры поверхностей: сфера, плоскость. Примеры тел: шар, куб.

Базовая изучаемая величина: расстояние (метрика в пространстве).

Другие изучаемые величины: углы.

Пространство – множество точек, в котором выполнены аксиомы стереометрии, описывающие свойства точек, прямых и плоскостей.

Напоминание. Аксиомы планиметрии -1

A1. (Аксиомы принадлежности)

Каковы бы ни были две точки, существует прямая, которой принадлежат эти точки.

Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие ей и не принадлежащие ей.

Через любые две различные точки можно провести прямую и притом только одну.

A2. (Аксиомы расположения или аксиомы порядка)

Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

A3. (Аксиома параллельности) (пятый постулат Евклида)

Через точку, не лежащую на данной прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Напоминание. Аксиомы планиметрии -2

A4. (Аксиомы измерения)

Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180° градусов. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

A5. (Аксиомы откладывания)

На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок, заданной длины, и только один.

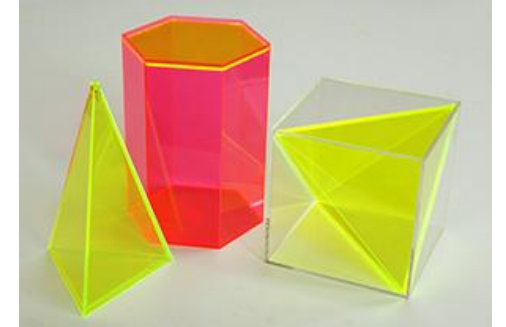
От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол заданной градусной мерой, меньшей 180° градусов, и только один.

Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

Пространственные фигуры (тела)

- **Многогранники** – тела, поверхность которых состоит из конечного числа плоских многоугольников.

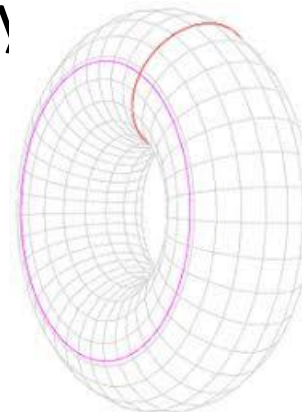
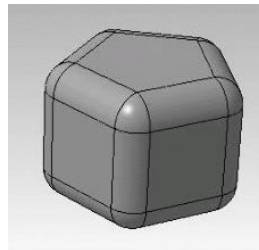
Примеры: призмы (в частности, параллелепипеды, в частности, куб), пирамиды (в частности, тетраэдр)



- **Круглые тела. Тела вращения** – тела, образованные при вращении плоской геометрической фигуры вокруг некоторой прямой (оси вращения), лежащей в плоскости фигуры.

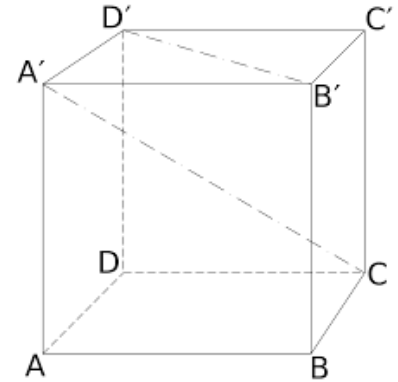
Примеры: цилиндр, конус, шар.

- **Прочие фигуры**



Многогранник. Терминология

Многогранник (полиэдр) – это геометрическое тело, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников. (Может быть **выпуклый** и **невыпуклый**).



Многоугольники, составляющие поверхность многогранника – **грани многогранника**.

Стороны и вершины этих многоугольников – **ребра и вершины многогранника**.

Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю многогранника**.

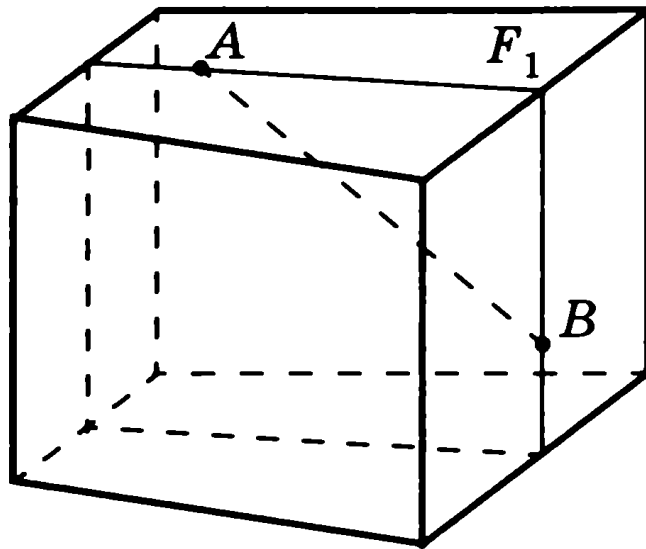
Отрезок, соединяющий две не соседние вершины многогранника, лежащие на одной его грани, называется **диагональю грани многогранника**.

Соседние грани – грани, имеющие общее ребро.

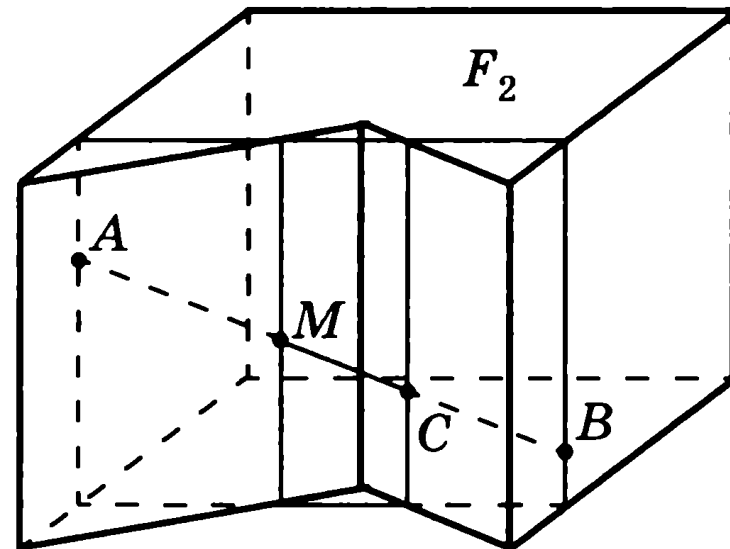
Понятие выпуклости

Фигура $\mathcal{F}$ называется выпуклой, если **отрезок** AB с концами в **любых двух** точках A и B фигуры $\mathcal{F}$ целиком содержится в этой фигуре.

Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону относительно плоскости, проходящей через любую его грань.



а)



б)

Примеры. Выпуклые и невыпуклые многогранники

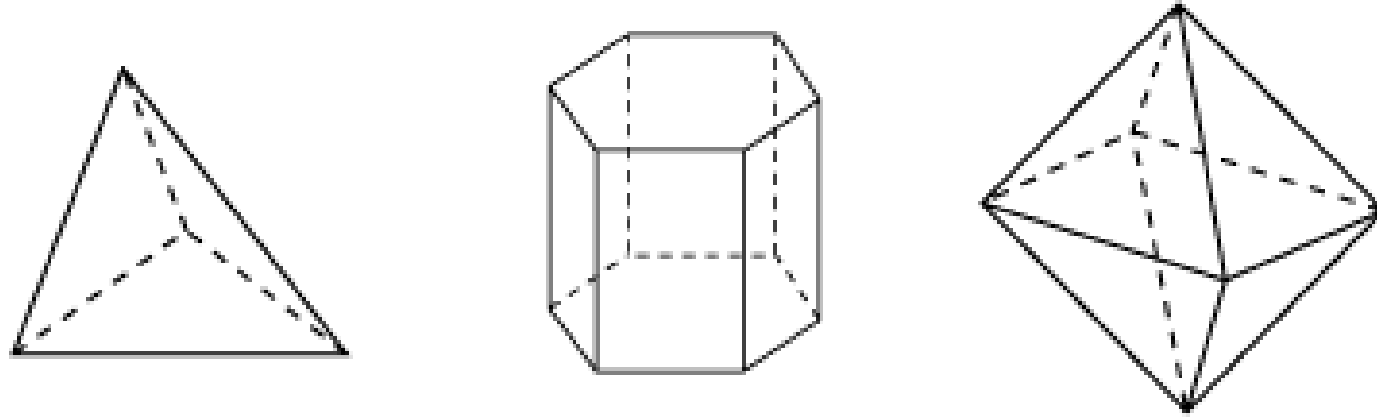


Рис. 1

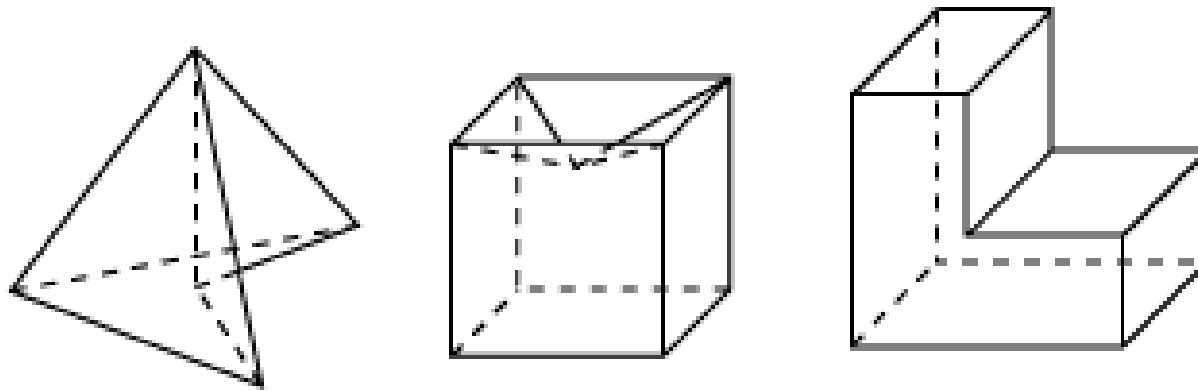


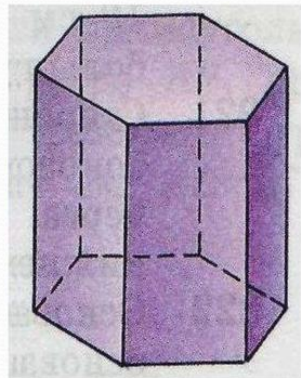
Рис. 2

Призмы. Терминология

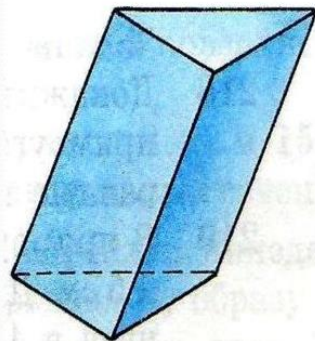
n – угольная призма – многогранник, две грани которого (основания призмы) – равные n -угольники, а все остальные n граней – параллелограммы (боковые грани).

Призма может быть прямой (боковые ребра перпендикулярны плоскости основания) или наклонной.

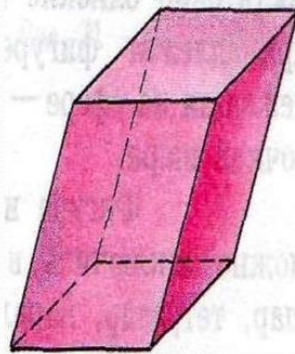
Правильная призма — это прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник.



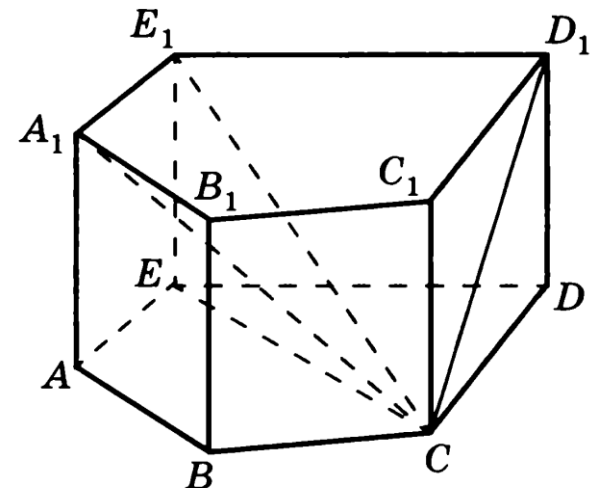
Шестиугольная
призма



Треугольная
призма



Четырехугольная
призма



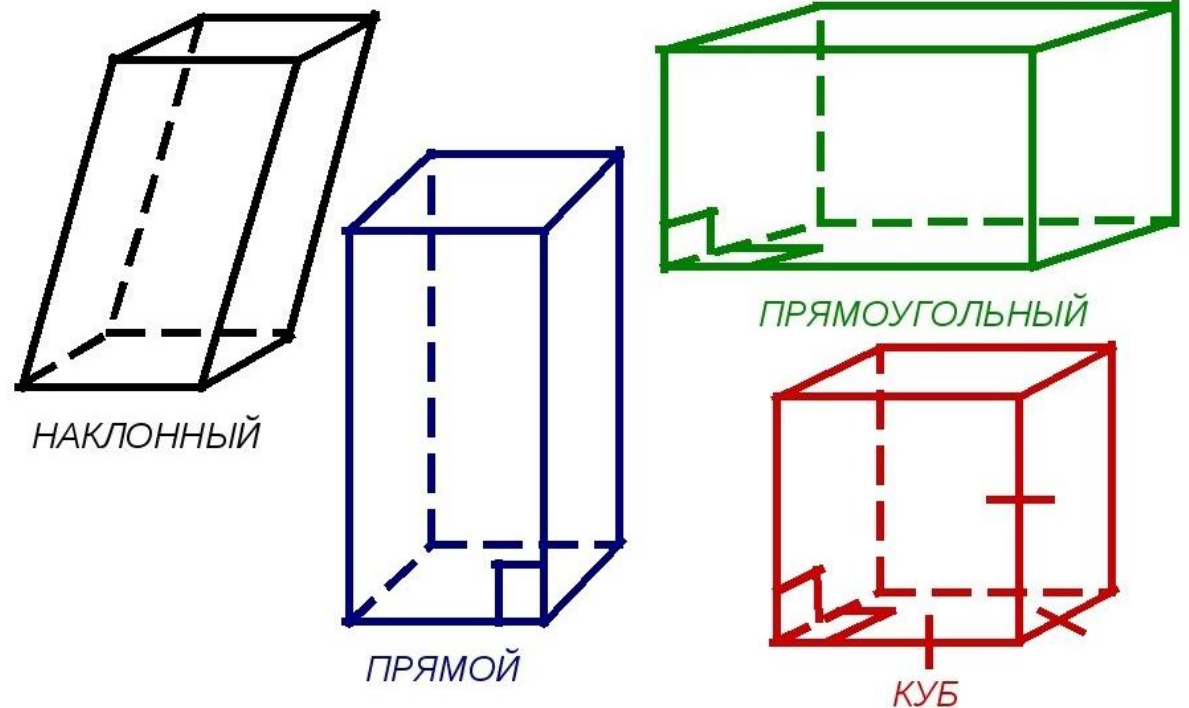
Параллелепипед. Терминология

Параллелепипед – призма, в основании которой лежит параллелограмм.

Параллелепипед может быть прямой (все боковые грани - прямоугольники) или наклонный.

Параллелепипед может быть прямоугольный (все грани - прямоугольники). Частный случай – куб (все грани - квадраты).

Замечание: на картинке прямой и прямоугольный параллелепипеды выглядят **одинаково!**



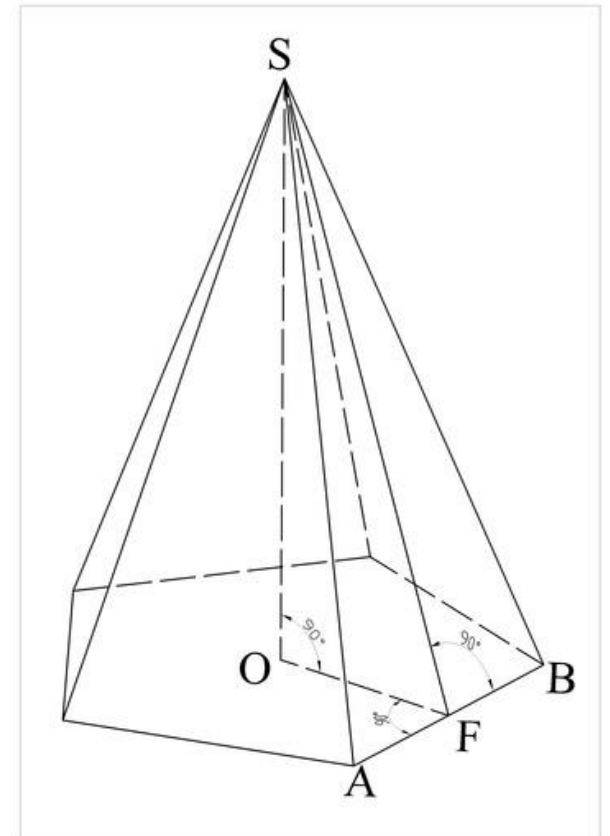
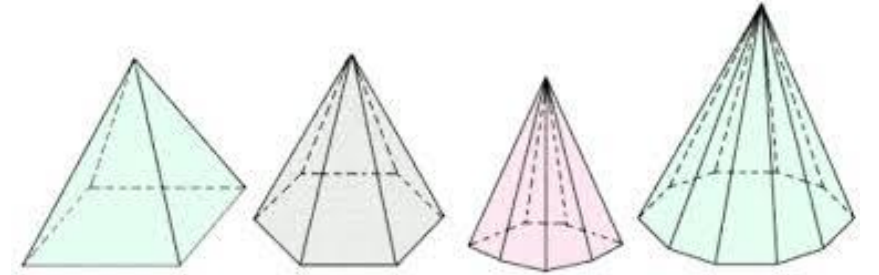
Пирамида. Терминология

n – угольная пирамида – многогранник, одна из граней которого — произвольный n -угольник (основание пирамиды), а остальные n граней (боковые грани) — треугольники, имеющие общую вершину (вершина пирамиды).

Боковые ребра – отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания.

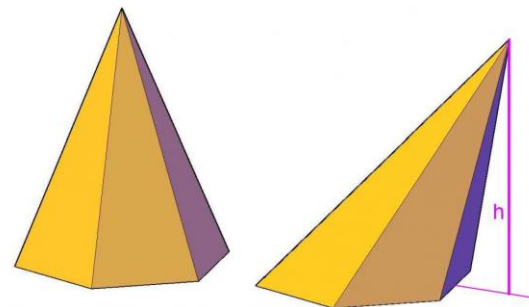
Высота пирамиды - это перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания пирамиды.

Апофема - это высота боковой грани правильной пирамиды (перпендикуляр, опущенный в боковой грани из вершины пирамиды к стороне основания).



Пирамида. Частные случаи. Терминология

Пирамида может быть наклонной (если одно из ребер образует тупой угол с основанием или если проекция вершины не является внутренней точкой основания) или прямой.

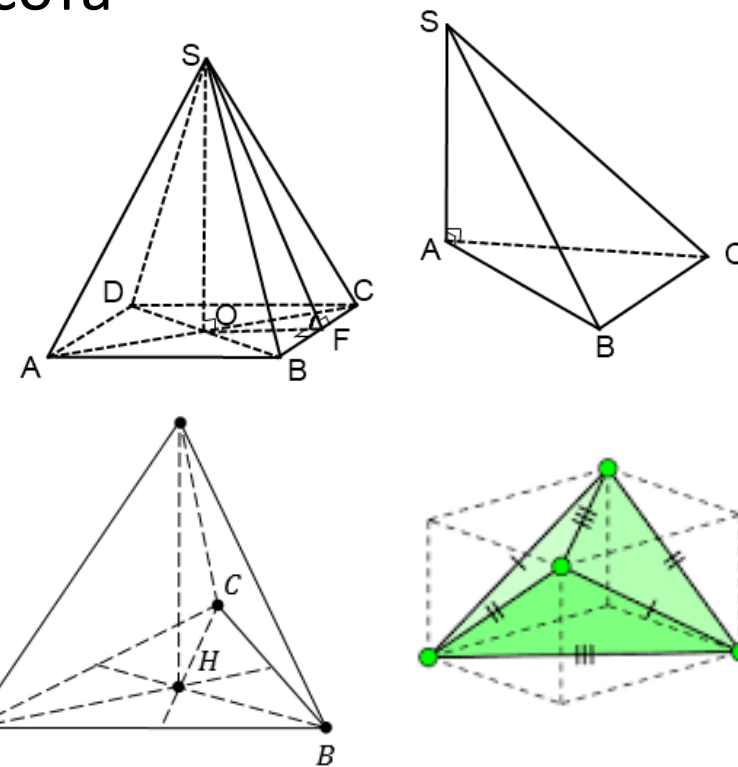


Пирамида может быть правильной (это пирамида, основание которой - правильный многоугольник, а высота проецируется в центр основания).

Прямоугольная пирамида - это пирамида, в которой одно из боковых рёбер перпендикулярно основанию

Замечания. Это ребро и будет высотой пирамиды. Соответствующие две грани будут перпендикулярны плоскости основания.

Тетраэдр – это треугольная пирамида. (Бывает правильный, прямоугольный, равногранный, ортоцентрический и др.)

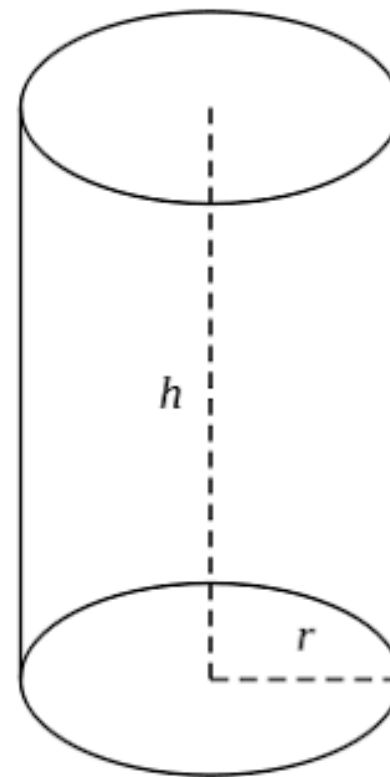
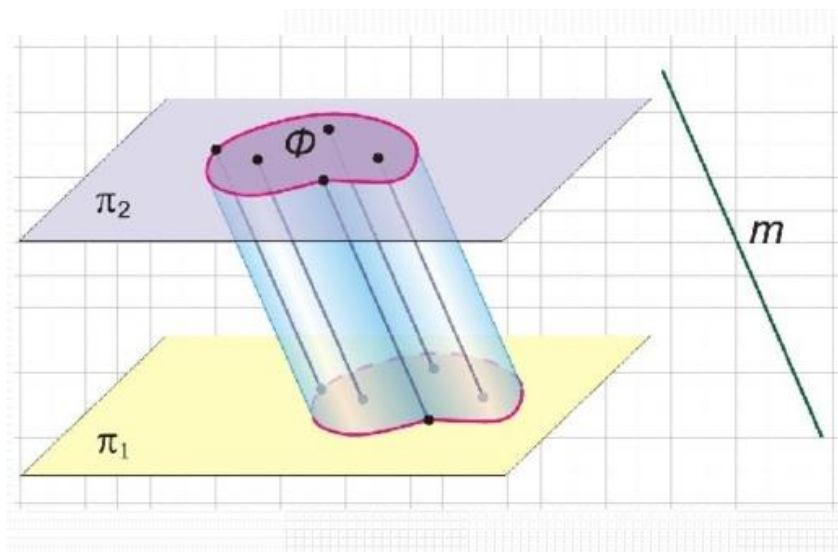


Тела вращения. Цилиндр

Цилиндр (прямой круговой) - тело, которое образуется при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону.

Равносторонний цилиндр: его осевое сечение (сечение, проходящее через ось вращения) – квадрат.

Замечание: вообще говоря, существует понятие **цилиндрическая поверхность**



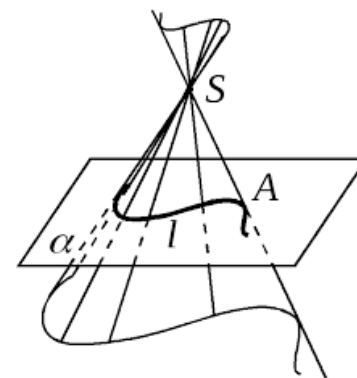
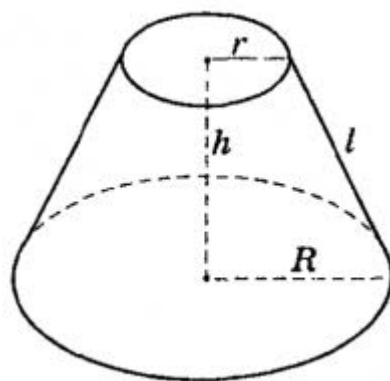
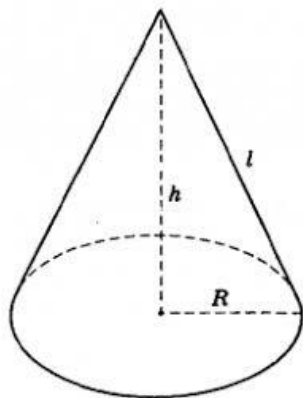
Тела вращения. Конус

Конус (прямой круговой) - тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет.

Усеченный конус - тело, полученное в результате разбиения исходного конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, и не содержащее вершину исходного конуса.

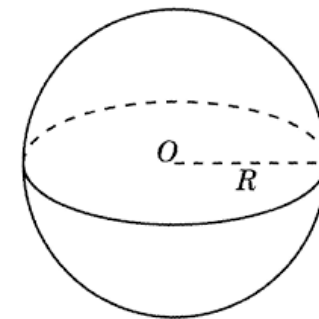
Равносторонний конус: его осевое сечение (сечение, проходящее через ось вращения) – равносторонний треугольник.

Замечание: вообще говоря, существует понятие **коническая поверхность**



Сфера. Тела вращения. Шар.

Шар - множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не больше данного R ($R > 0$). Данная точка называется **центром шара**, а данное расстояние – **радиус шара**.



Замечание. Шар – тело вращения, полученное вращением полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр.

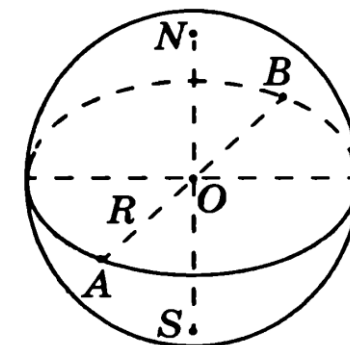
Сфера - множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, равном данному R .

Отрезок, соединяющий любые две точки шаровой поверхности и не проходящий через центр шара - **хорда шара** (сферы).

Отрезок, соединяющий любые две точки шаровой поверхности и проходящий через центра шара – **диаметр шара** (сферы).

ВАЖНО! Изображение шара - полюсы не лежат на абрисе!

Плоскость, проходящая через центр шара, называется **диаметральной плоскостью шара**. Полученный в сечении круг – **большой круг**.



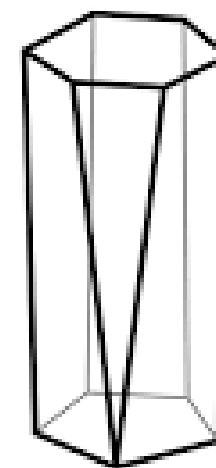
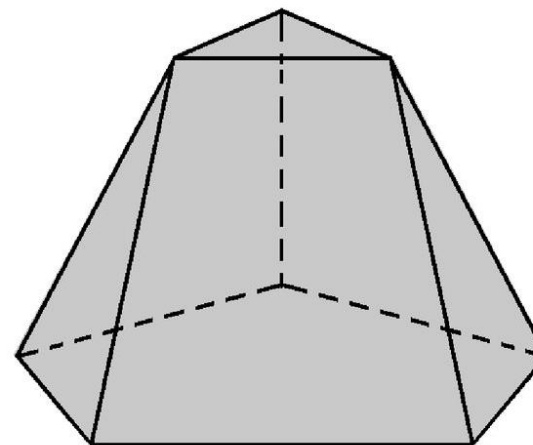
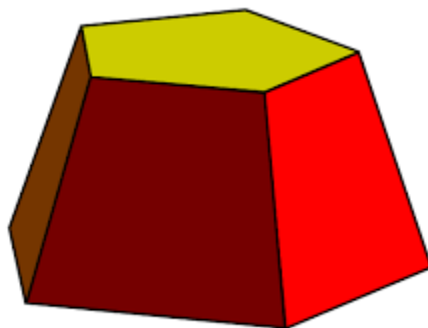
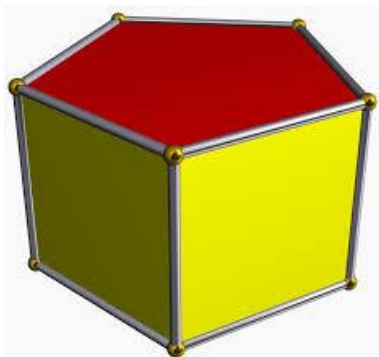
Части и элементы шара



Прочие многогранники

Призматойд – выпуклый многогранник, две грани которого (основания) параллельны, а остальные являются треугольниками или трапециями.

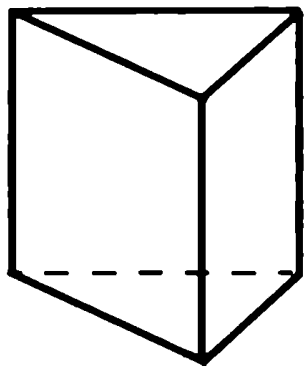
Частный случаи – призма, усеченная пирамида.



Выпуклые многогранники. Формула Эйлера

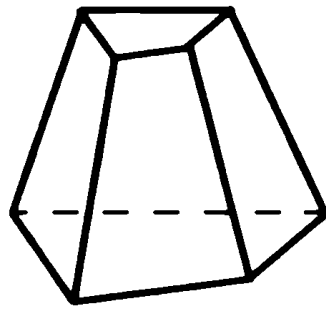
Теорема Декарта-Эйлера. Для любого **выпуклого** многогранника сумма числа вершин V и числа граней Γ на 2 больше, чем число его ребер P . Величина $V + \Gamma - P$ называется эйлеровой характеристикой многогранника.

$$V + \Gamma - P = 2$$



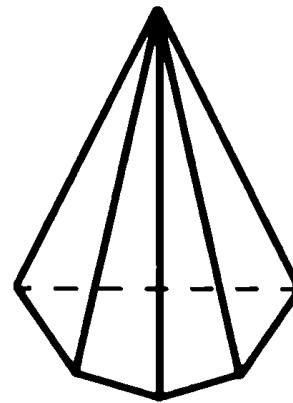
а)

$$V=6, P=12, \Gamma=6$$



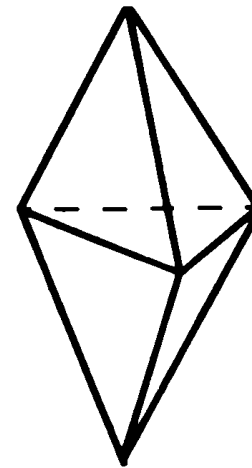
б)

$$V=8, P=12, \Gamma=6$$



в)

$$V=6, P=10, \Gamma=6$$



г)

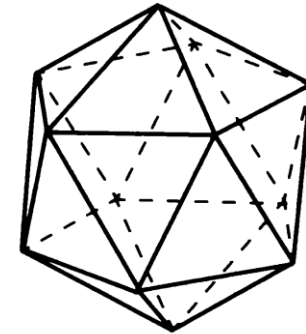
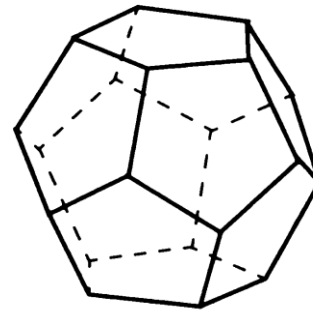
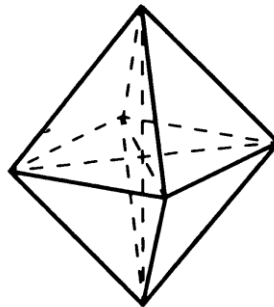
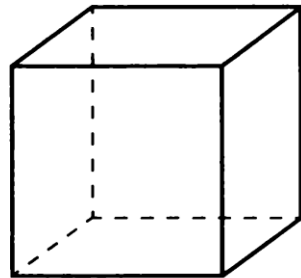
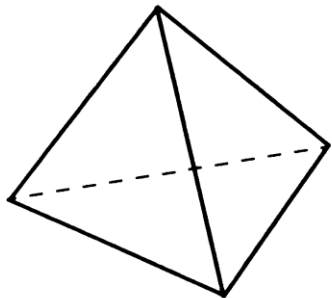
$$V=5, P=9, \Gamma=6$$

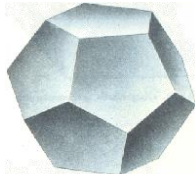
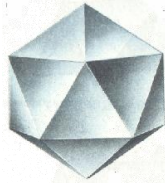
Правильные многогранники

Многогранник называется правильным, если он

- выпуклый
- все его грани – равные друг другу правильные многоугольники
- в каждой вершине сходится одинаковое число ребер
- все двугранные углы равны

Теорема. Существует ровно пять различных (с точностью до подобия) выпуклых правильных многогранников (тела Платона): тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.



№	Количество граней	Вид	Название
1	4		тетраэдр
2	6		гексаэдр
3	8		октаэдр
4	12		додекаэдр
5	20		икосаэдр

Тела Платона

Правильный многогранник	Число		
	граней	вершин	рёбер
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

Доказательство теоремы о телах Платона

Теорема. Существует ровно пять различных (с точностью до подобия) выпуклых правильных многогранников (тела Платона): тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

Доказательство: $V + \Gamma - P = 2$

В каждой грани n ребер и каждое ребро считаем дважды $\Rightarrow 2P = n\Gamma$

В каждой вершине сходится k ребер, каждое ребро считаем дважды $\Rightarrow 2P = kV$.

$$\text{Значит, } \frac{2P}{k} + \frac{2P}{n} - P = 2 \Rightarrow P \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right) = 1$$

Необходимо, чтобы $n \geq 3$, $k \geq 3$ и $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0$

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow 3 \leq k < 6. \text{ Аналогично } 3 \leq n < 6.$$

Значит, грани могут быть правильными треугольниками, четырехугольниками или пятиугольниками. Возможны случаи: $(n; k)$

$(3; 3), (4; 3), (3; 4), (5; 3), (3; 5)$

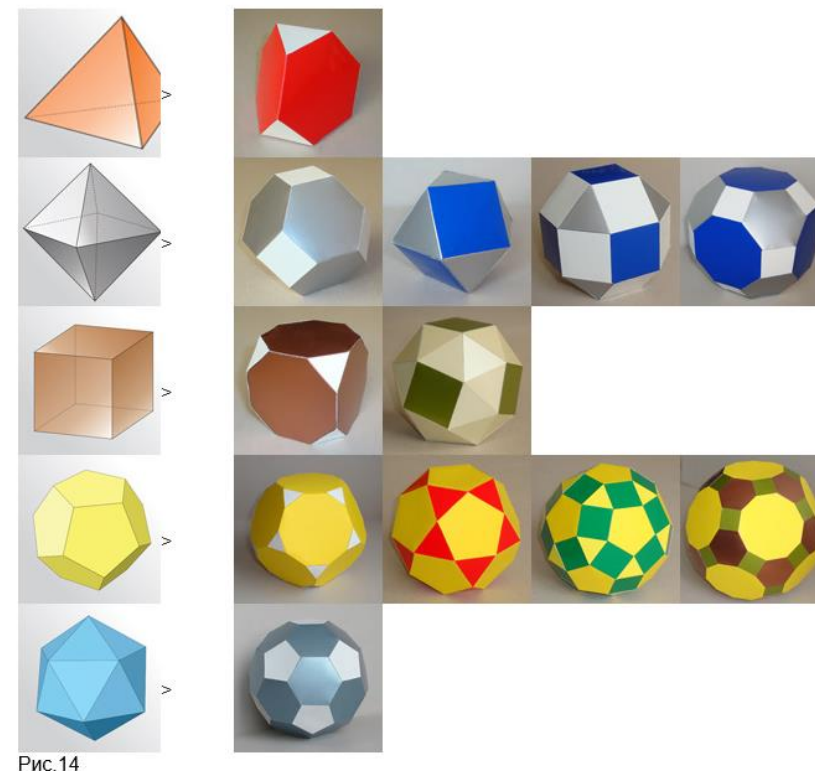
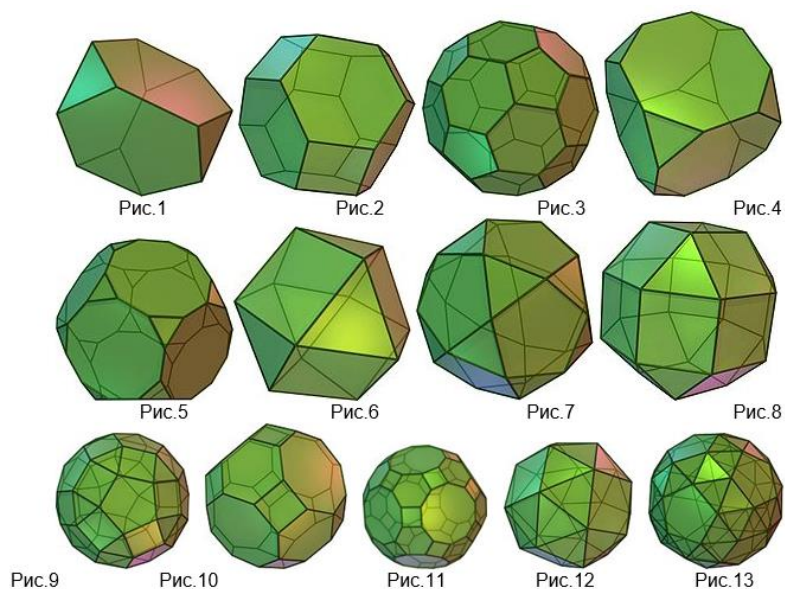
чтд

Полуправильные многогранники (тела Архимеда)

Многогранник называется полуправильным, если он выпуклый и все его грани – правильные многоугольники

Существует 13 тел Архимеда

<https://e-koncept.ru/2015/65341.htm>



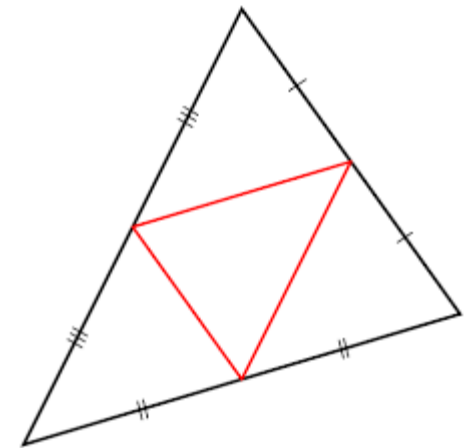
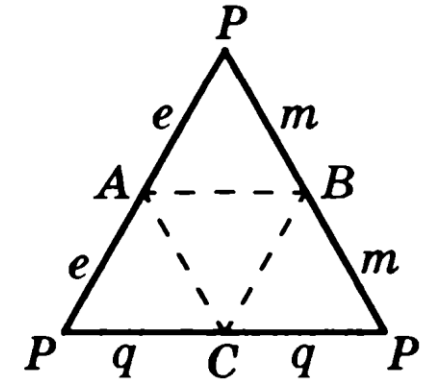
Развертка

Развертка многогранника – развертка его поверхности (объединение конечного числа многоугольников с указанием имени «склеиваемых» ребер и вершин). Под «склеиванием» понимаем отождествление.

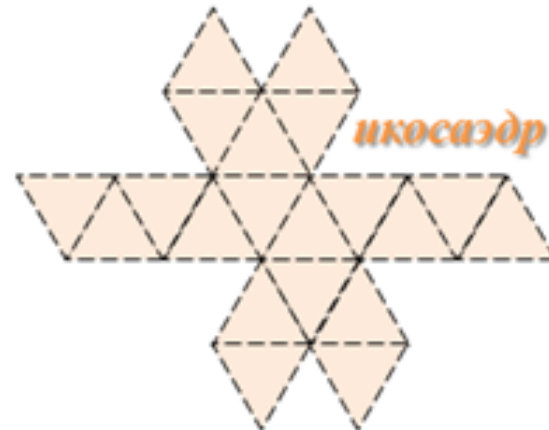
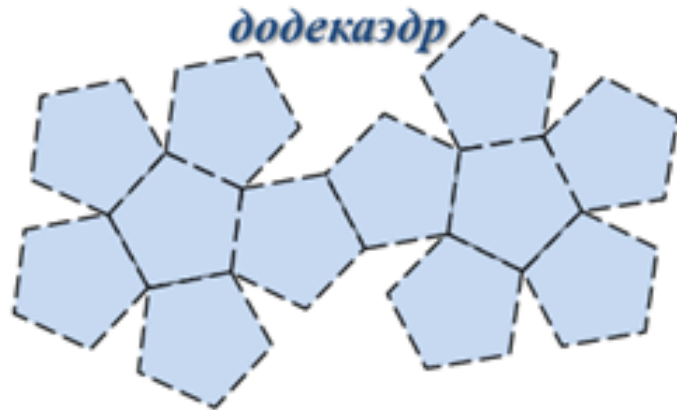
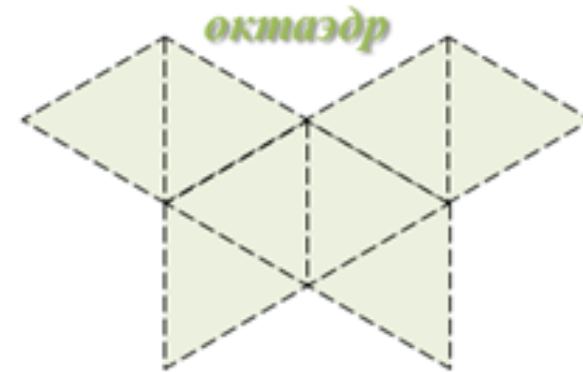
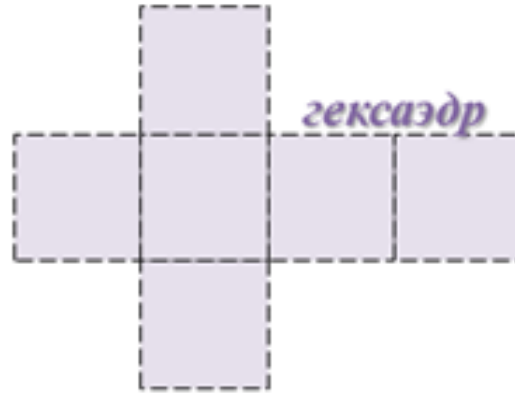
Необходимые условия «сворачиваемости» развертки в замкнутый выпуклый многогранник:

1. **Замкнутость:** каждая сторона имеет ровно одну «пару» для «склеивания»
2. **Условие Эйлера:** проверить $V - P + \Gamma = 2$
3. **Условие выпуклости:** сумма выпуклых углов многоугольников (граней) при каждой из вершин развертки должна быть меньше 360°

Условия не являются достаточными!



Развертки правильных многогранников



Другие факты о выпуклых многогранниках

1. Не существует многогранника, у которого 7 ребер. Число ребер многогранника может быть или равно 6, или ≥ 8 .
2. Всякий выпуклый многогранник имеет хотя бы одну вершину, из которой выходит не более 5 ребер, а также грань, в которой не более 5 ребер.
3. В любом выпуклом многограннике есть хотя бы одна треугольная грань или хотя бы один трехгранный угол.
4. Число треугольных граней плюс число трехгранных углов выпуклого многогранника ≥ 8 .
5. У любого многогранника есть по крайней мере две грани с одинаковым числом сторон.

http://www.etudes.ru/data/localdocs/dolbilin_kvant1.pdf

Модели. Каркасные фигуры

