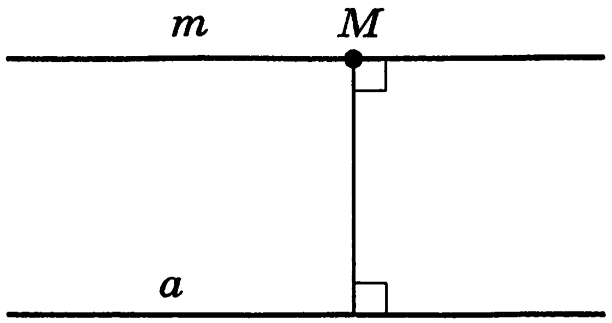
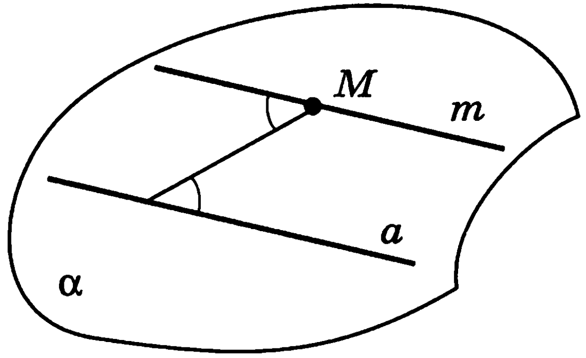
Аксиомы стереометрии
и их следствия

Аксиомы стереометрии -1

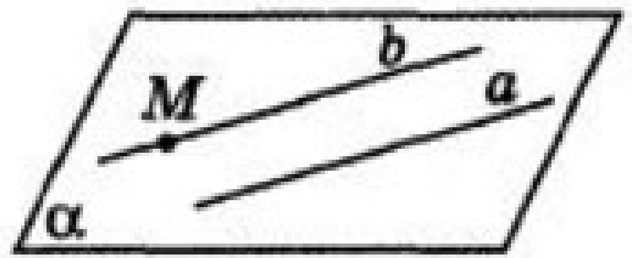
R1. В пространстве существуют плоскости. В каждой плоскости пространства выполнены все аксиомы планиметрии.

Пример иллюстрации построения прямой, параллельной данной на плоскости и в пространстве:



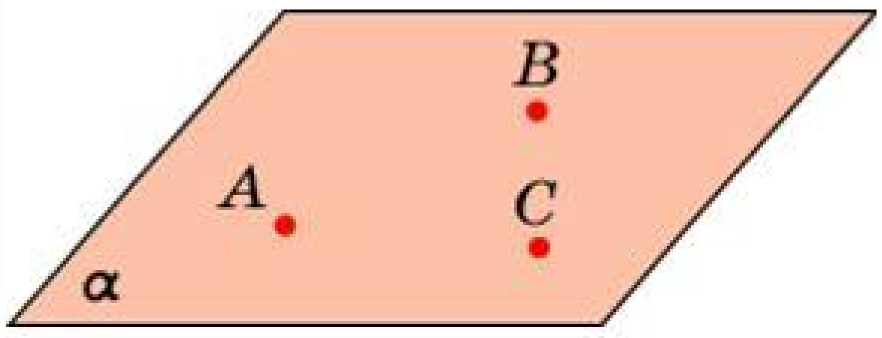


или



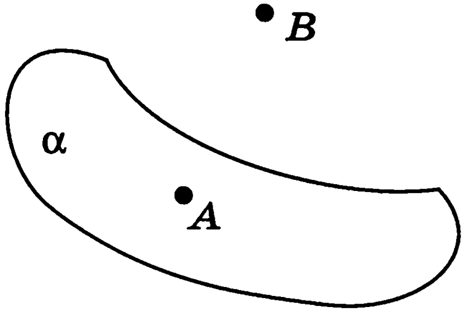
Аксиомы стереометрии -2

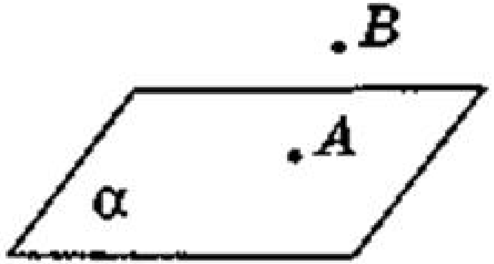
R2. (<u>Аксиома плоскости</u>). Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом ровно одну.



Аксиомы стереометрии -3

R3. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

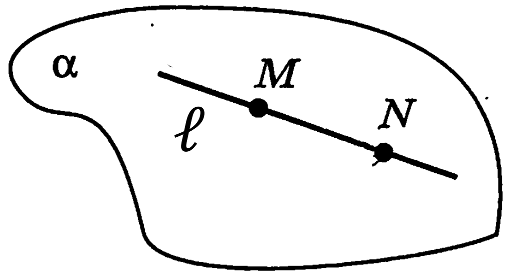




$$A \in \alpha; \quad B \notin \alpha$$

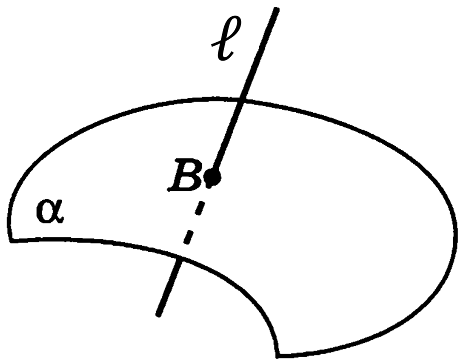
Аксиомы стереометрии -4

R4. (<u>Аксиома прямой и плоскости</u>). Если прямая проходит через две точки плоскости, то она целиком лежит в этой плоскости.



$$\begin{cases} M \in \ell, N \in \ell \\ M \in \alpha, N \in \alpha \end{cases} \Rightarrow \ell \subset \alpha$$

<u>Опр.</u> Если **<u>прямая и плоскость</u>** имеют ровно одну общую точку, то говорят, что они **<u>пересекаются</u>**.



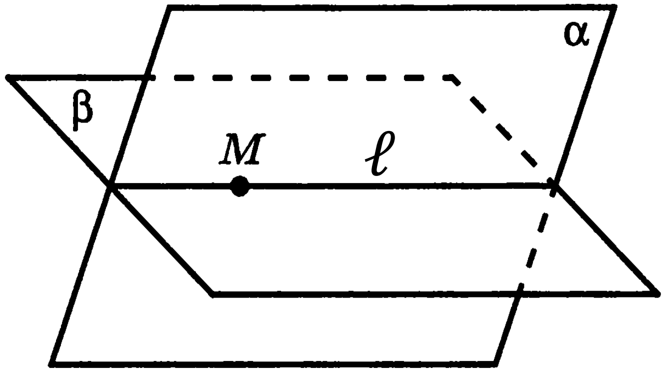
$$\alpha \cap \ell = B$$

<u>Замечание</u>. Символ ∩ не обозначает пересекающиеся прямую и плоскость, вообще говоря,

$$\alpha \cap \ell = \left[\begin{array}{l} B \\ \ell \\ \emptyset \end{array}\right.$$

Аксиомы стереометрии -5

R5. (<u>Аксиома пересечения плоскостей</u>). Если две различные плоскости имеют общую точку, то пересечение этих плоскостей есть их общая прямая.



$$\begin{cases} M \in \alpha \\ M \in \beta \end{cases} \Rightarrow \ \alpha \cap \beta = \ell, \qquad M \in \ell$$

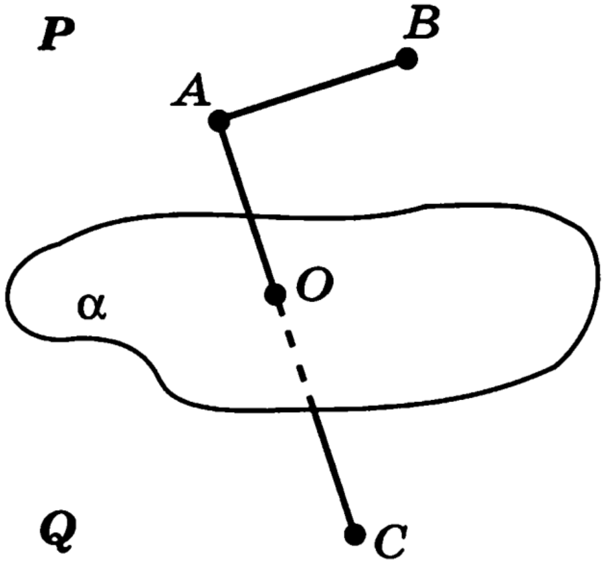
<u>Опр</u>. Две различные плоскости, имеющие общую точку (следовательно, общую прямую), называются <u>**пересекающимися плоскостями**</u>.

Аксиомы стереометрии -6

R6 (<u>Аксиома разбиения пространства плоскостью</u>). Любая плоскость α разбивает множество не принадлежащих ей точек пространства на два непустых множества так, что

а) любые две точки, принадлежащие разным множествам, разделены плоскостью α

б) любые две точки, принадлежащие одному и тому же множеству, не разделены плоскостью α



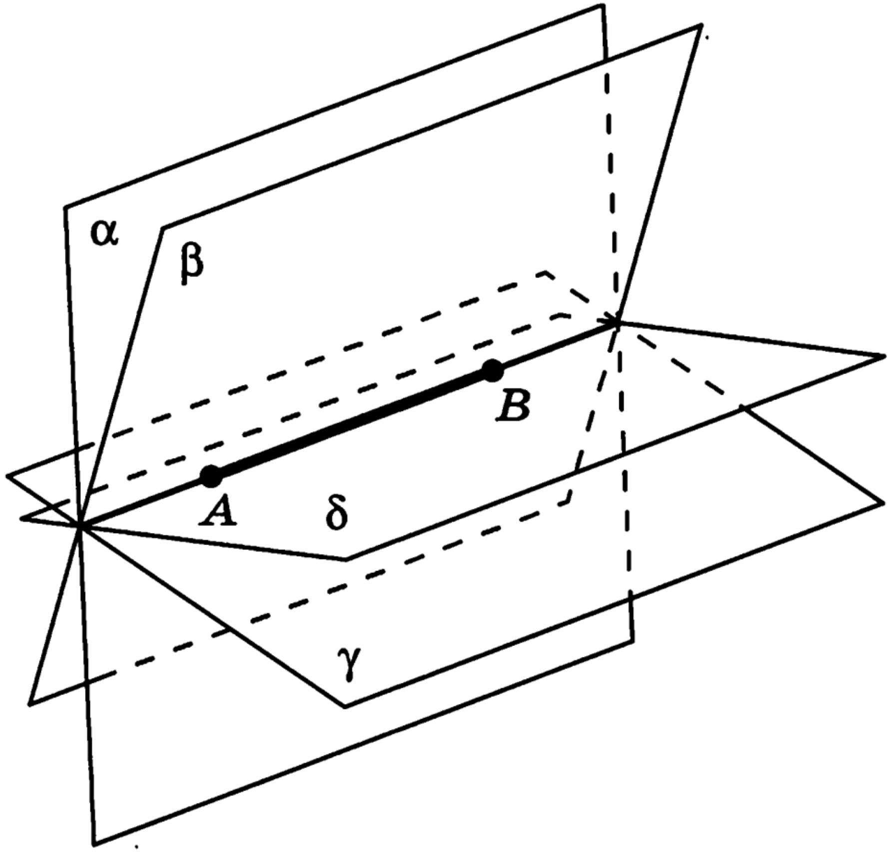
Т.е. Любая плоскость разбивает пространство на два **<u>полупространства</u>**, плоскость α – **<u>граница полупространства</u>**.

Аксиомы стереометрии -7

R7 (<u>Аксиома расстояния</u>). Расстояние между любыми двумя точками пространства одно и то же на любой плоскости, проходящей через эти точки.

<u>Обозначения</u>:

$$AB = |AB| = d(A;B) = \rho(A;B)$$



Следствия из аксиом -1

<u>Теорема 1</u>. Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом ровно одну.

<u>Доказательство</u>: <u>дано</u>: прямая ℓ, точка $A \notin \ell$

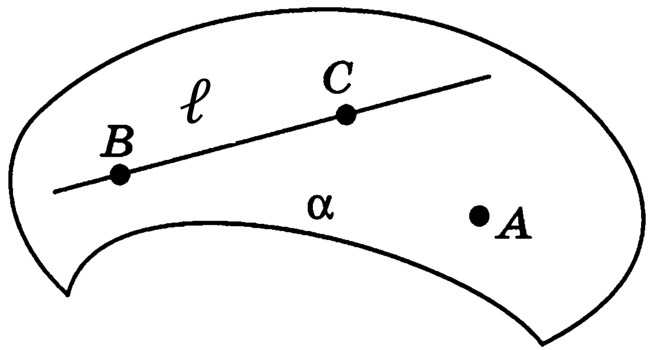
❑ Рассмотрим $\forall\ B \in \ell, \forall C \in \ell, B \neq C \Rightarrow$

через точки B и C проходит единственная прямая – прямая $\ell \underset{A\notin\ell}{\Longrightarrow}$

точки A, B, C не лежат на одной прямой $\underset{\text{R2}}{\Rightarrow}$

$\exists!$ плоскость $ABC = \alpha$: $\quad A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha \underset{\text{R4}}{\Rightarrow}$

$\ell\ \subset \alpha \Rightarrow \alpha$ – искомая плоскость.



❑ От противного. Пусть $\exists\beta$: $A \in \beta, \ell\ \subset \beta \Rightarrow$

$A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$ и $A \in \beta, B \in \beta, C \in \beta \underset{\text{R2}}{\Rightarrow}\ \alpha = \beta$, значит,

плоскость α – единственная.

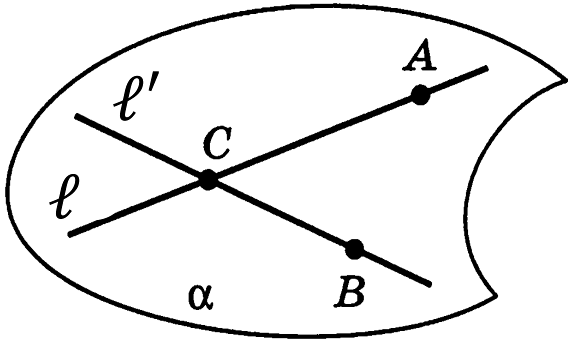
ЧТД

Следствия из аксиом -2

Опр. Две прямые в пространстве называются **пересекающимися**, если они имеют ровно одну общую точку.

Теорема 2. Через любые две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом ровно одну.

Доказательство: дано: прямые ℓ и ℓ', $\ell \cap \ell' = C$



❑ Рассмотрим $\forall A \in \ell$, $A \neq C$ и $\forall B \in \ell'$, $B \neq C \Rightarrow$

точки A, B, C не лежат на одной прямой $\underset{\mathrm{R2}}{\Rightarrow}$

$\exists!$ плоскость $ABC = \alpha$: $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha \underset{\mathrm{R4}}{\Rightarrow}$

$\ell \subset \alpha$ и $\ell' \subset \alpha \Rightarrow \alpha$ – искомая плоскость.

❑ От противного. Пусть $\exists\beta$: $\ell \subset \beta$, $\ell' \subset \beta \Rightarrow \ell \subset \beta, B \in \beta, B \notin \ell \underset{\mathrm{T1}}{\Rightarrow}$

плоскость α – единственная

ЧТД

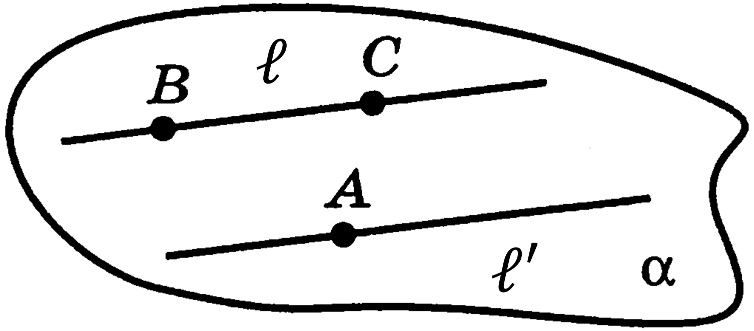
Следствия из аксиом -3

<u>Опр</u>. Две прямые в пространстве называются **<u>параллельными</u>**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. <u>Обозначение</u>: $\ell \parallel \ell'$

<u>Теорема 3</u>. Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.

<u>Доказательство</u>: <u>дано</u>: прямые $\ell \parallel \ell'$

- $\ell \parallel \ell' \underset{\text{def}}{\Longrightarrow} \exists$ плоскость α: $\ell \subset \alpha$ и $\ell' \subset \alpha$
- Рассмотрим $\forall A \in \ell' \underset{\ell \parallel \ell'}{\Longrightarrow} A \notin \ell \underset{\text{T1}}{\Rightarrow}$



плоскость α – единственная

<u>Или</u>: от противного. Пусть $\exists \beta$: $\ell \subset \beta$, $\ell' \subset \beta$.

Рассмотрим $\forall B \in \ell$, $\forall C \in \ell$, $B \neq C$ и $\forall A \in \ell' \underset{\ell \parallel \ell'}{\Longrightarrow}$

точки A, B, C не лежат на одной прямой $\underset{\text{R2}}{\Rightarrow} \alpha = \beta$

ЧТД

Резюме. Способы задания плоскости

<u>В пространстве плоскость можно задать</u>:

- ❖ (R2) тремя точками, не лежащими на одной прямой
- ❖ (T1) прямой и не принадлежащей ей точкой
- ❖ (T2) двумя пересекающимися прямыми
- ❖ (T3) двумя параллельными прямыми