

Производная

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство: рассмотрим проколотую окрестность точки $x = 0$, пусть $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

$$|OA| = |OK| = 1, |HK| = \sin x > 0, |AL| = \operatorname{tg} x > 0, \cos x > 0$$

$$S_{\triangle OAK} \leq S_{\text{сект} OAK} \leq S_{\triangle OAL}$$

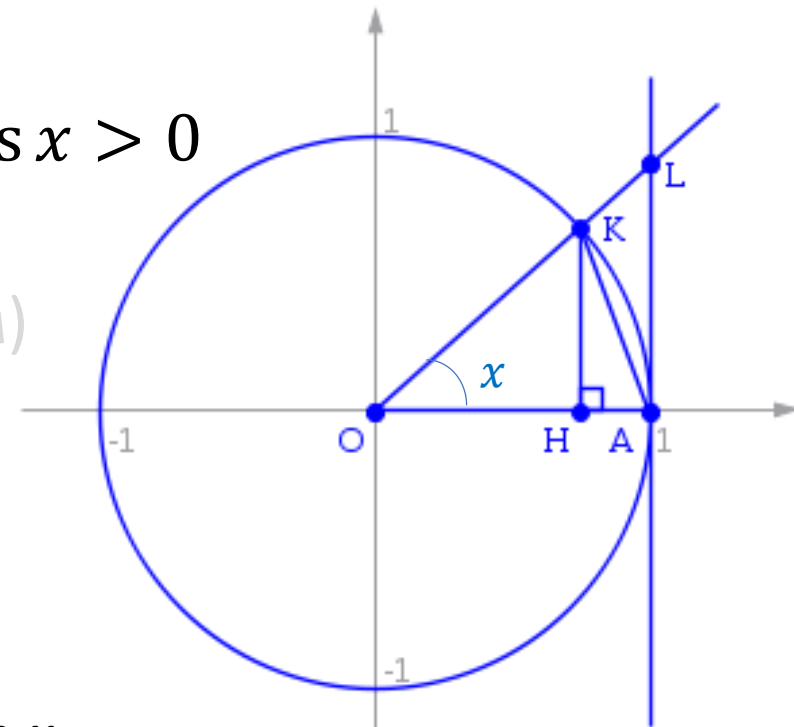
$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \quad (\text{делим на } \sin x \text{ и переворачиваем})$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{при } x \in (0; \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Т.к. } \cos(-x) = \cos x, \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}, \text{ то}$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{при } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{По теореме о "двух милиционерах" } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$



Производная функции в точке

Пусть $f(x)$ определена в окрестности некоторой точки $x = a$ $|x - a| < \delta$

Опр. Производной функции $f(x)$ в точке $x = a$ называется **число**, обозначаемое $f'(a)$ и вычисляемое по формуле

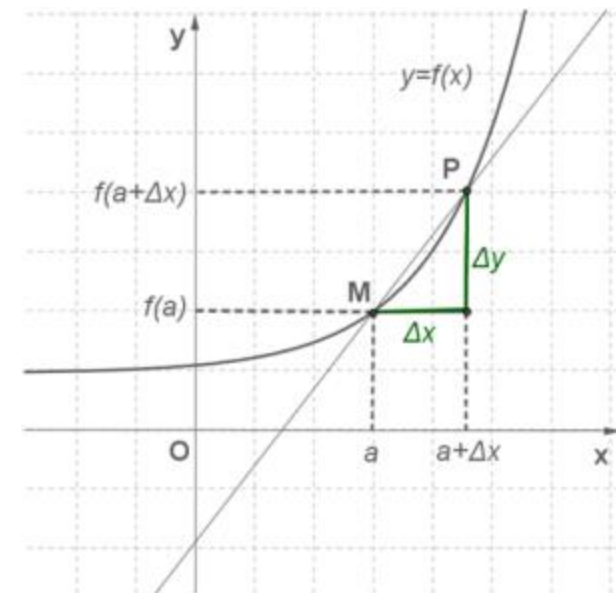
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Приращение функции $f(x)$ в точке $x = a$: $\Delta f(a) = f(x) - f(a)$

Приращение аргумента: $\Delta x = x - a$

Разностное отношение: $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$$



Производная функции

Опр. Производной функции $f(x)$ называется **функция**, обозначаемая $f'(x)$ и вычисляемая по формуле

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

Приращение аргумента Δx

Сравним с определением производной в точке:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$$

Обозначения: $f'(a) = \dot{f}(a) = f'(x) \Big|_{x=a} = f'_x(x) \Big|_{x=a}$

Дифференцируемость функции

Опр. Если функция $f(x) \in C(a)$ (непрерывна), то $f(a + \Delta x) = f(a) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - б.м. функция при $\Delta x \rightarrow 0$.

Опр. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x = a$, если в этой точке существует и конечна ее производная, т.е. если

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где } \beta(\Delta x) - \text{б.м. функция при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Обозначение: $f(x) \in D(a)$

Сравним с понятием определения производной: $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

Опр. Гладкая функция – непрерывно дифференцируемая функция (имеет непрерывную производную).

Производная. Эквивалентные определения

Опр. Производной функции $f(x)$ в точке $x = a$ называется число, обозначаемое $f'(a)$ и вычисляемое по формуле

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Опр. (по Коши) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: 0 < |x - a| < \delta$ верно

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon .$$

Опр. (по Гейне) Если для **любой** последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}: x_n \neq a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < |x_n - a| < \delta \text{ верно } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a)$$

Утв. Эти определения эквивалентны.

Понятие непрерывности и дифференцируемости

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a) \Leftrightarrow \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a) + \alpha_n,$

где $\{\alpha_n\}$ - б.м. последовательность при $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow f(x_n) - f(a) = f'(a)(x_n - a) + \alpha_n(x_n - a)$$

$\{x_n - a\}$ и $\{\alpha_n\}$ - б.м., а $f'(a)$ - огр. $\Rightarrow \{f(x_n) - f(a)\}$ - б.м.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f(x) \in C(a). \quad \text{чтд}$$

Обратное не верно!

Контрпример: $y = |x|$ - в точке $x = 0$ непрерывная, НО не дифференцируемая функция, т.к. $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$. В этой точке излом графика функции.

Дифференцируемость функции по графику

Точки, где $\nexists f'(x)$:

$$x = 2$$

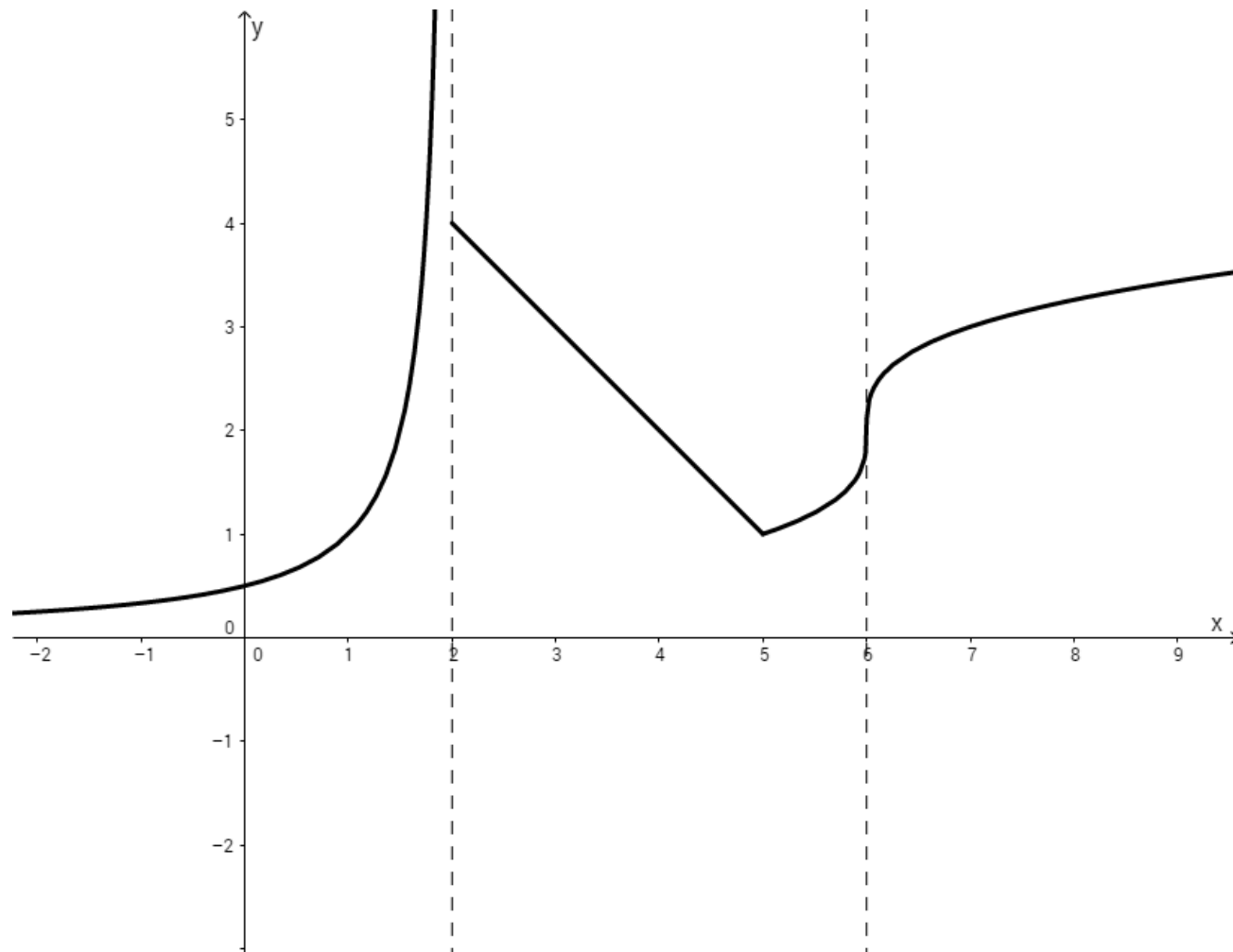
разрыв

$$x = 5$$

излом

$$x = 6$$

вертикальная касательная



Геометрический смысл производной -1

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, пусть $x_0 = a$ и $f(x) \in D(a)$.

График функции $y = f(x)$ обозначим через F .

Точка $M(a, f(a)) = M(x_0, y_0) \in F$.

Рассмотрим точку $M_1(x, f(x)) \in F$.

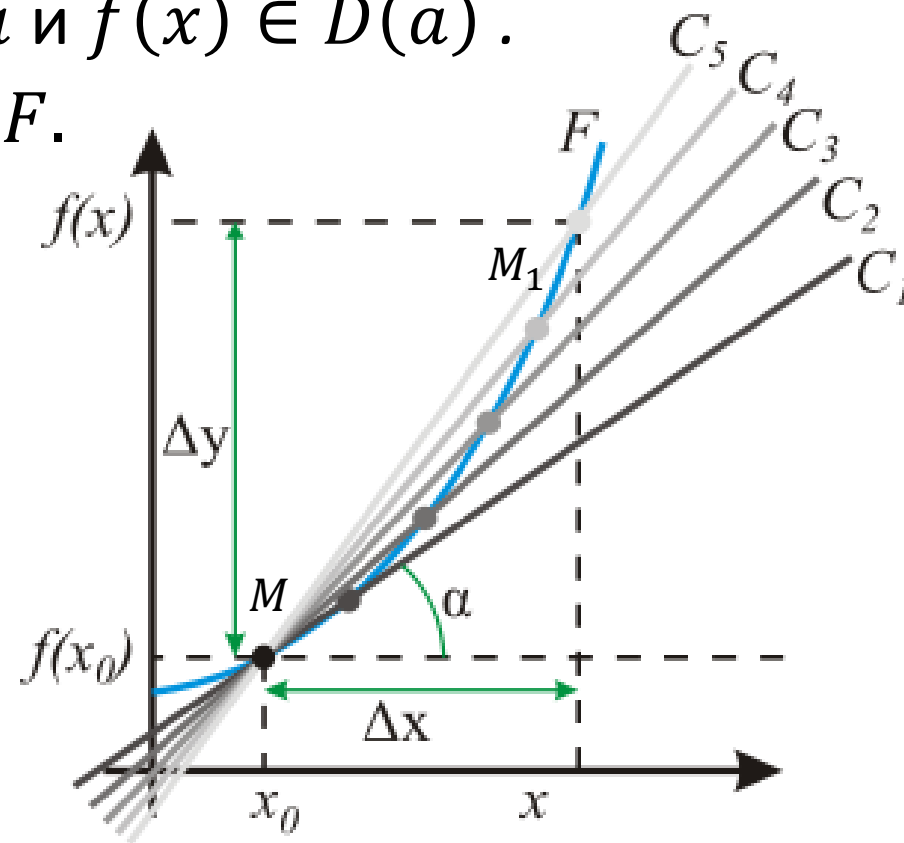
MM_1 - секущая (на рис. - это C_5)

с угловым коэффициентом

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k_{\text{сек}}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} k_{\text{сек}} = k_{\text{кас}}$$

Предельное положение этой секущей – касательная к функции $y = f(x)$ в точке $M(a, f(a))$.



Геометрический смысл производной -2

Уравнение касательной

Опр. Рассмотрим $f(x) \in D(a)$. Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ называется прямая с угловым коэффициентом $k = f'(a)$, проходящая через точку $M(a, f(a))$.

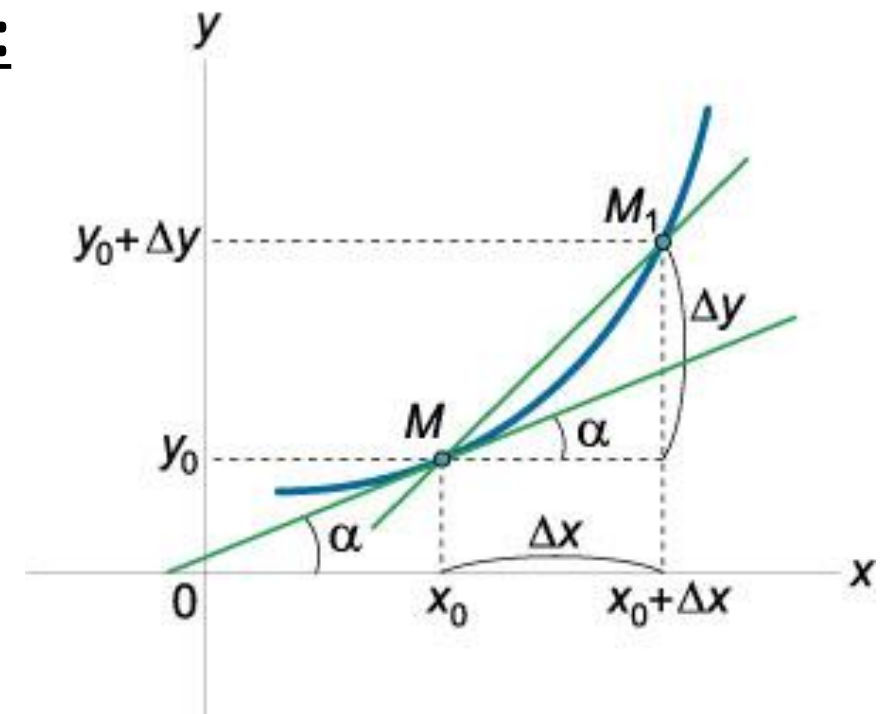
Вывод (геометрический смысл производной):

Производная в точке $x = a$ - это тангенс угла наклона (угловой коэффициент) касательной

$y = kx + b$ к графику функции в этой точке.
 $k = f'(a)$

Уравнение касательной:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$



Понятие касательной

Замечания:

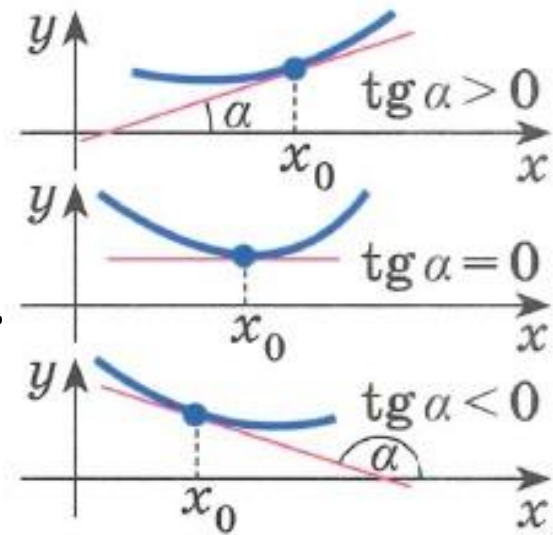
1. По опр. график функции не может иметь вертикальной касательной. Будем считать, что график имеет вертикальную касательную в точке,

если
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} k_{\text{сек}} = k_{\text{кас}} = \infty.$$

Пример: $y = \sqrt{|x|}$ при $x = 0$

2. Касательной к линейной функции является сам график.
3. Подходы к определению касательной:

- 1 общая точка у функции и прямой (например, прямая с окружностью) (**не работает с $y = x^2$ и прямой $x = 0$**)
- в окрестности точки график функции лежит по одну сторону от касательной (**не работает с $y = x^3$ и прямой $y = 0$**)



Уравнение нормали

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть $x_0 = a$.

Точка $M(a, f(a)) = M(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$.

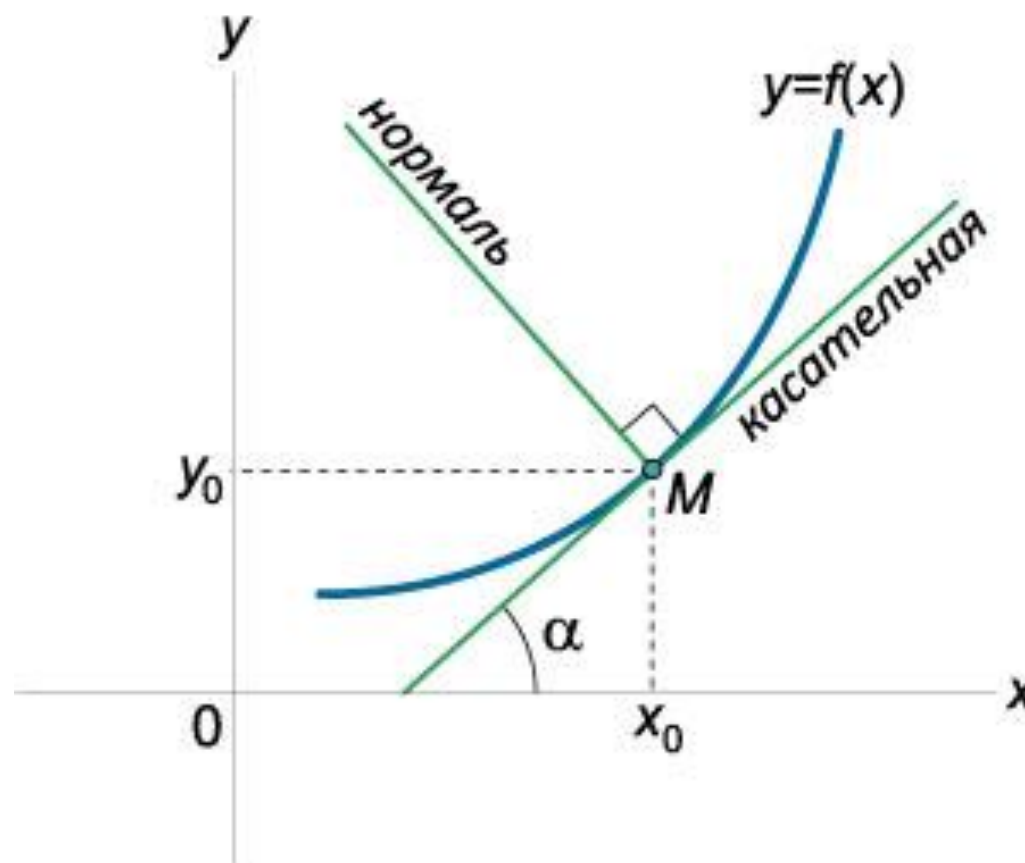
Уравнение касательной:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Уравнение нормали к кривой

$y = f(x)$ в точке $M(a, f(a))$:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$



Уравнение касательной и нормали - пример

Функция $f(x) = x^2$, точка $x = 2$, т.е. $M(2; 4)$

$$f'(x) = 2x \Big|_{x=2} = 4$$

Касательная:

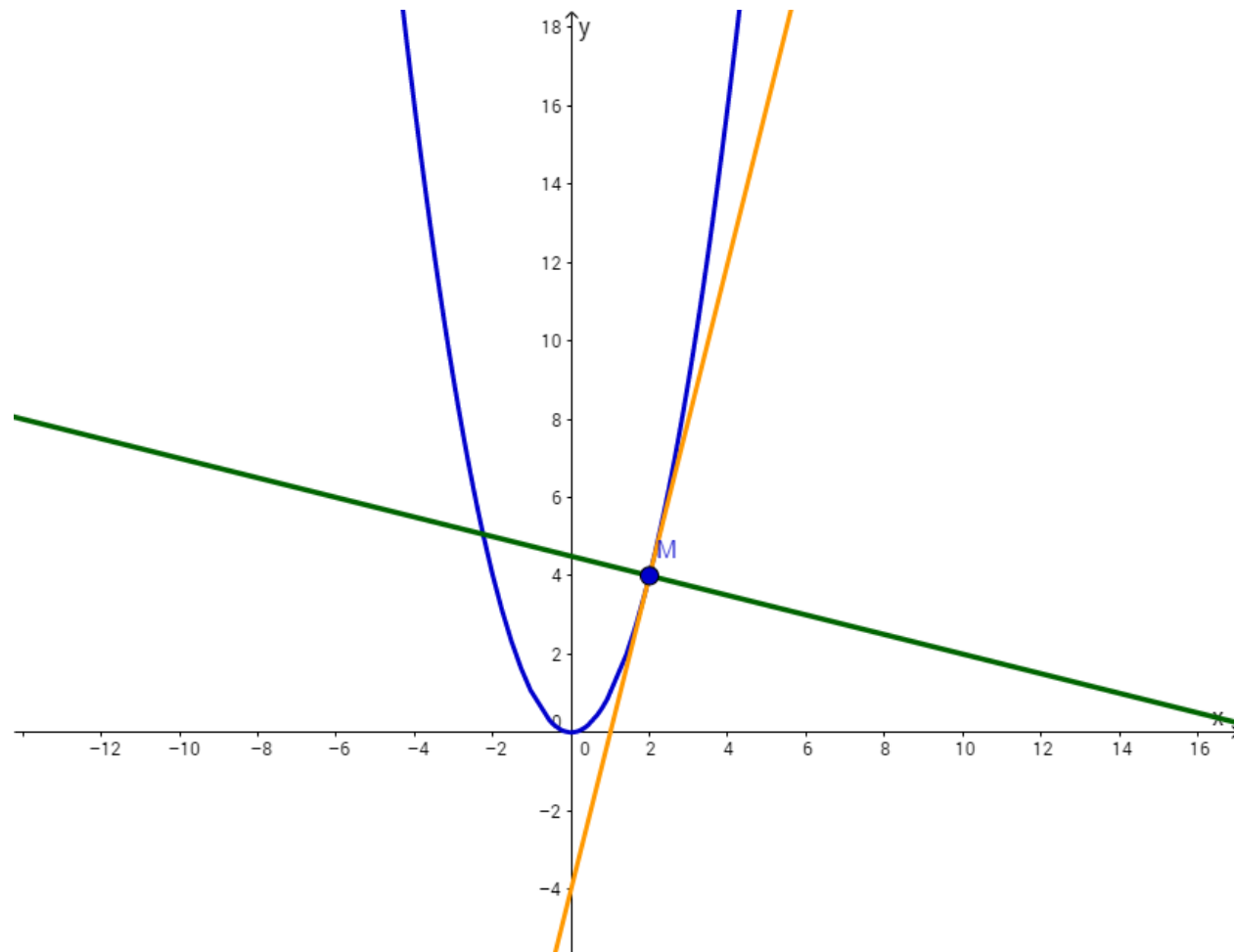
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4$$

Нормаль:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

$$y = 4 - \frac{1}{4}(x - 2) = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2}$$



Угол между графиками функций

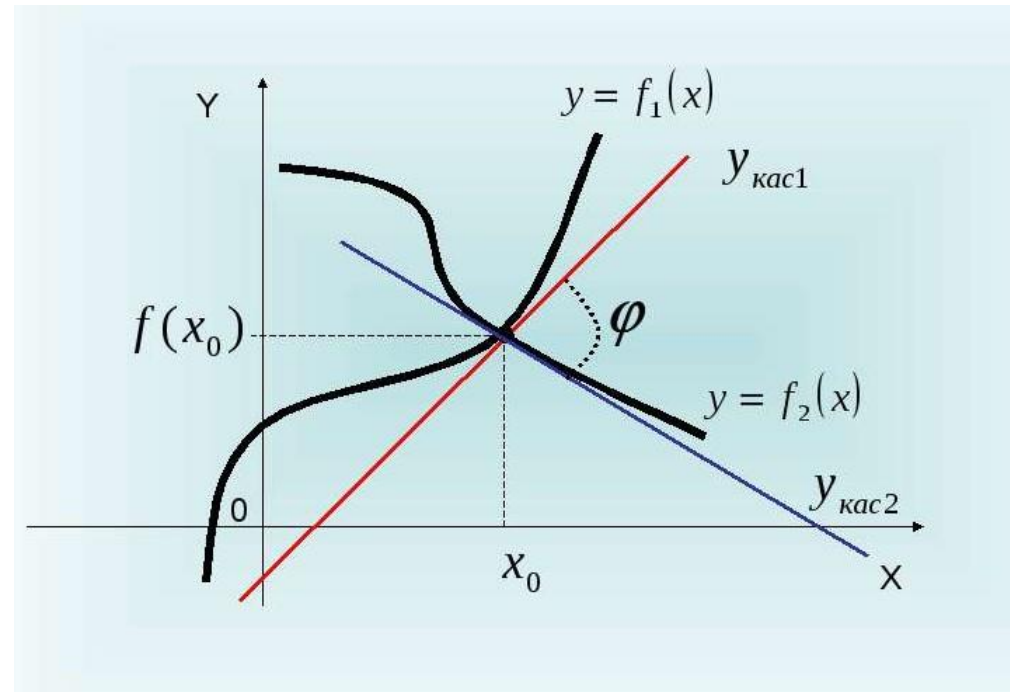
Опр. Углом между графиками функций в точке называется угол между касательными (если они существуют) к графикам этих функций, проведенным в указанной точке.

$$y = k_1x + b_1 \text{ и } y = k_2x + b_2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{tg}(\alpha - \beta)| =$$

$$= \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \right| = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

$$\text{при } k_1 k_2 \neq -1$$



Опр. Два графика касаются друг друга в их общей точке, если они в этой точке имеют одну и ту же касательную.

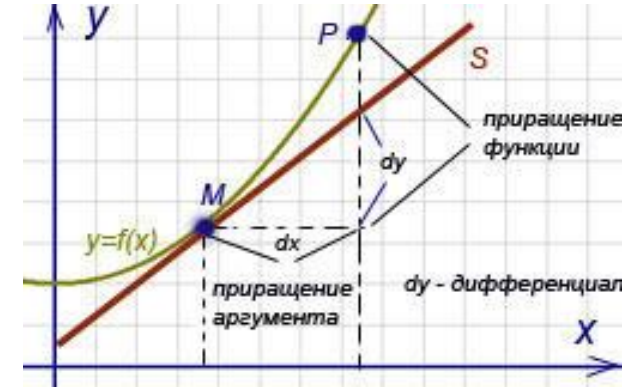
Дифференциал

Опр. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x = a$, если $f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\beta(\Delta x)$ - б.м. функция при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$f(a + \Delta x) \sim f(a) + f'(a) \cdot \Delta x \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

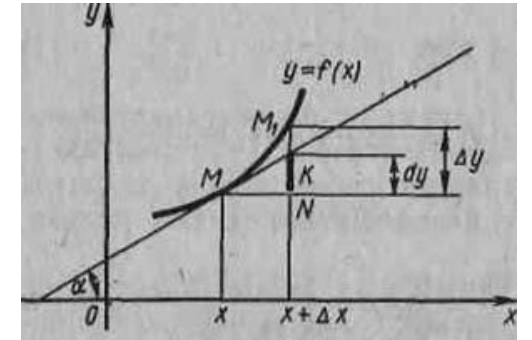
Дифференциалом называется величина $f'(a) \cdot \Delta x = df$

$$df = f'(x) dx \qquad \frac{df}{dx} = f'(x)$$



Сравним с понятием производной в точке: $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$

Это линейная часть приращения функции (приращение касательной).

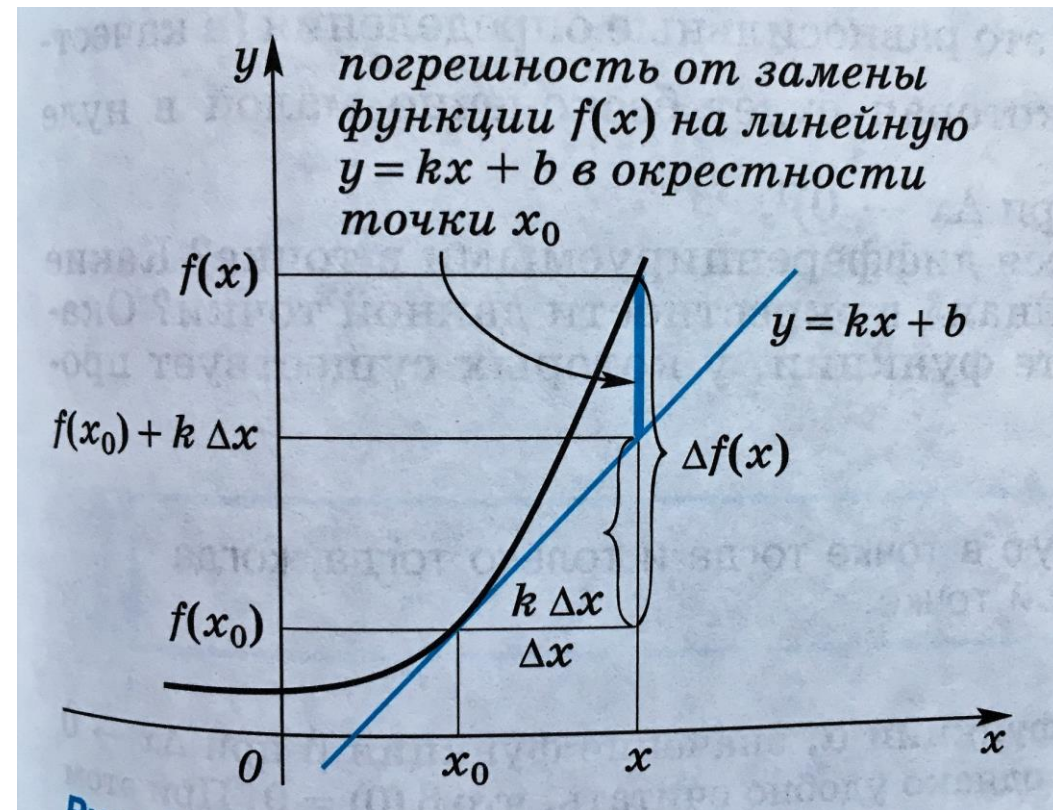
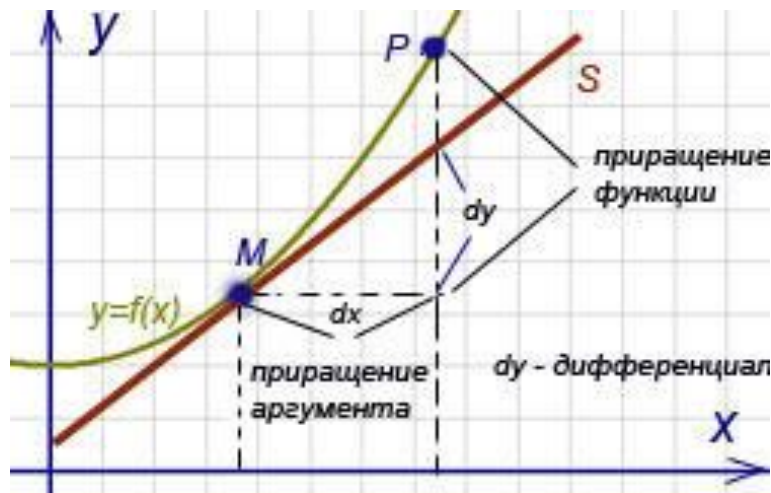
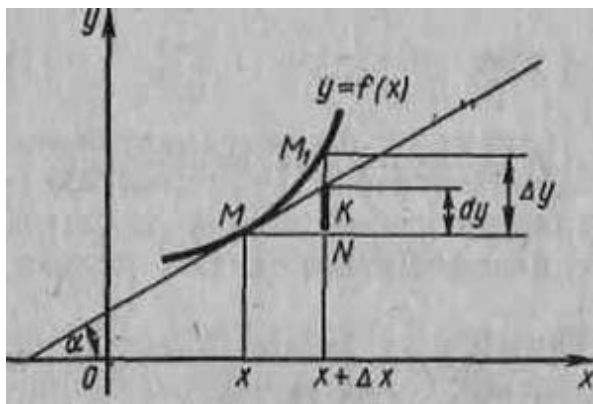


Обозначения: $f'(a) = \dot{f}(a) = f'(x) \Big|_{x=a} = f_x'(x) \Big|_{x=a} = \frac{df}{dx}(a) = \frac{df}{dx} \Big|_{x=a}$

Геометрический смысл дифференциала

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x$$

$$f(a + \Delta x) \sim f(a) + f'(a) \cdot \Delta x \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0$$



Приближенное значение функции вблизи некоторой точки равно сумме значения в этой точке и дифференциала в этой точке.

Разность между координатами графика функции и графика касательной есть бесконечно малая величина более высокого порядка по сравнению с приращением функции Δx .

Дифференциал. Примеры -1

Рассмотрим функцию $f(x) = 3x^2 + 2$ и точку $x = 2$

Производная: $f'(x) = 6x$

Дифференциал: $df(2) = f'(2) \cdot \Delta x = 12\Delta x$

Приращение функции:

$$\Delta f = f(2 + \Delta x) - f(2) = 3(2 + \Delta x)^2 + 2 - (3 \cdot 2^2 + 2) = 12\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

Погрешность: $3(\Delta x)^2$

$$\text{При } \Delta x = 0,1 \quad 3(\Delta x)^2 = 0,03$$

$$\text{При } \Delta x = 0,01 \quad 3(\Delta x)^2 = 0,0003$$

$$\text{При } \Delta x = 0,001 \quad 3(\Delta x)^2 = 0,000003$$

Дифференциал. Примеры -2

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и точки $x = 64$ и $x_0 = 65$

Производная: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Дифференциал: $df(64) = f'(64) \cdot \Delta x = \frac{1}{16} \Delta x$

Приращение аргумента: $\Delta x = 1$

Приращение функции: $\Delta f \approx df(64)$

$$f(65) \approx f(64) + df(64) = 8 + \frac{1}{16} = 8,0625$$

Сравним: $\sqrt{65} = 8,062257748 \dots$

Производные элементарных функций -1

1. $c = \text{const}$, $\boxed{c' = 0}$ для $\forall c \in \mathbb{R}$

Доказательство: $f(x) = f(a) = c$, тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = 0$ для $\forall a \in \mathbb{R}$

2. $\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall n \in \mathbb{N}$

Доказательство: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} =$

$$= a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + a^2 \cdot a^{n-3} + \dots + a^{n-2} \cdot a + a^{n-1} = n \cdot a^{n-1} \quad \text{для } \forall a \in \mathbb{R}$$

Примеры: $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$

Производные элементарных функций -2

3. $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство: для $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cos \frac{x+a}{2} = \cos a \end{aligned}$$

Производные элементарных функций -3

4. $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство: для $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} - \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \sin \frac{x+a}{2} = -\sin a$$

Правила дифференцирования -1

1. $\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство: для $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(a) \pm g(a))}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) \pm (g(x) - g(a))}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))}{x - a} \pm \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g(x) - g(a))}{x - a} = f'(a) \pm g'(a)$$

Правила дифференцирования -2

2. $\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство: для $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)(f(x) - f(a)) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} = \\ &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \end{aligned}$$

Правила дифференцирования -3

3. $\boxed{(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)}$ $c = const$, для $\forall c \in \mathbb{R}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

Примеры:

I. $(2x^3 - x + 4)' =$
 $= (2x^3)' - x' + 4' =$
 $= 2 \cdot 3 \cdot x^2 - 1 + 0 = 6x^2 - 1$

II. $(x^2 \sin x)' =$
 $= (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' =$
 $= 2x \sin x + x^2 \cos x$

Правила дифференцирования -4

$$4. \quad \boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}} \text{ для } \forall x \in \mathbb{R} \text{ при } g(x) \neq 0$$

Доказательство: для $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{(x - a)g(x)g(a)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{(x - a)g(x)g(a)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a)(f(x) - f(a)) - f(a)(g(x) - g(a))}{(x - a)g(x)g(a)} = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} \end{aligned}$$

Производные элементарных функций -4

5. $\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Производные элементарных функций -5

6. $\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \\ &= \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Производные элементарных функций -6

7. $\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{(x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{m}{x^{m+1}} = -m \cdot x^{-m-1}} \text{ для } \forall x \in \mathbb{R} \text{ и } \forall m \in \mathbb{N}$$

Доказательство: $\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{1' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{x^{2m}} = \frac{-m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}} = -m \cdot x^{-m-1}$

Замечание: $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}}$ для $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Примеры: $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Правила дифференцирования -5

5. Теорема о производной сложной функции

Рассмотрим $z = F(x) = g(f(x))$, т.е. $y = f(x)$, $z = g(y)$. Если $\exists f'(a)$ и $g'(b)$, где $b = f(a)$, то $\exists$

$$F'(x) = \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \text{для } \forall x \in \mathbb{R}$$

Доказательство: для $\forall a \in \mathbb{R}$ $F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} =$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(y) - g(b)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

$$= g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \quad (\text{по непрерывности в точке } x = a)$$

Производная сложной функции. Примеры

I. $F(x) = \sin(x^2 + \operatorname{tg} x), g(y) = \sin y, y = f(x) = x^2 + \operatorname{tg} x$

$$(\sin(x^2 + \operatorname{tg} x))' = \cos(x^2 + \operatorname{tg} x) \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

II. $F(x) = \sqrt{\sqrt{x} + \sin^2 3x}, g(y) = y^{\frac{1}{2}}, y = f(x) = \sqrt{x} + \sin^2 3x$

$$= \left(\sqrt{\sqrt{x} + \sin^2 3x} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x} + \sin^2 3x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \sin 6x}{2\sqrt{\sqrt{x} + \sin^2 3x}}$$

Правила дифференцирования -6

6. Теорема о производной обратной функции

Пусть $y = f(x)$ - непрерывная, строго монотонная функция.

$x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$, $b = f(a)$, $a = \varphi(b)$. Если $\exists f'(a) \neq 0$, то

$$\exists \boxed{\varphi'(y) = \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}} \text{ для } \forall x \in \mathbb{R}$$

Доказательство: для $\forall a \in \mathbb{R}$ $0 \neq f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$

$$= \lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{\varphi(y) - \varphi(b)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow b} \frac{\varphi(y) - \varphi(b)}{y - b}} = \frac{1}{\varphi'(b)} \text{ (по непрерывности в точке } x = a)$$

Производные элементарных функций -7

8. $\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ для $\forall x \in (-1; 1)$

Доказательство: рассмотрим $y = f(x) = \sin x$ и

$$f^{-1}(y) = \varphi(y) = \arcsin y = x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

$f'(x) = \cos x \neq 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. там $\cos x > 0$, значит,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ где } y = \sin x \in (-1; 1)$$

Производные элементарных функций -8

9. $\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ для $\forall x \in (-1; 1)$

Доказательство:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{для} \quad \forall x \in [-1; 1]$$

$$\arcsin' x + \arccos' x = 0 \quad \text{для} \quad \forall x \in (-1; 1) \text{ и}$$

$$\arccos' x = -\arcsin' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{для} \quad \forall x \in (-1; 1)$$

Производные элементарных функций -9

10. $\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство: рассмотрим $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ и

$$f^{-1}(y) = \varphi(y) = \operatorname{arctg} y = x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{\operatorname{tg}' x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

11. $\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

Производные элементарных функций -10 (производные, изучаемые в 11 классе)

12. $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$ для $\forall x > 0, x \in \mathbb{R}$

13. $\boxed{(e^x)' = e^x}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

14. $\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$ для $\forall x > 0, x \in \mathbb{R}$

15. $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

Исследование функций на монотонность с помощью производной -1

Теорема 1.

Пусть $f(x) \nearrow$ на $x \in (\alpha; \beta)$ и $\exists f'(x)$ на $x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow f'(x) \geq 0$

Пусть $f(x) \searrow$ на $x \in (\alpha; \beta)$ и $\exists f'(x)$ на $x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow f'(x) \leq 0$

Теорема 2 (обратная). Критерий нестрогой монотонности функции.

Если $f'(x) \geq 0$ для $\forall x \in (\alpha; \beta)$, то $f(x) \nearrow$.

Если $f'(x) \leq 0$ для $\forall x \in (\alpha; \beta)$, то $f(x) \searrow$.

Замечания: **НО НЕ ВЕРНО:** ~~$f(x) \uparrow$ на $x \in (\alpha; \beta) \Leftrightarrow f'(x) > 0$~~

Возможно, что $f(x) \uparrow$, если $f'(x) = 0$ в конечном числе точек.

Исследование функций на монотонность с помощью производной -2

Теорема 3. Достаточное условие строгого возрастания функции.

Пусть $f(x) \in C\langle a; b \rangle$ и $f(x) \in D(a; b)$, причем $\forall x \in (a; b) \ f'(x) \geq 0$ и $f'(x) = 0$ лишь в конечном числе точек, то $f(x) \uparrow$ на $\langle a; b \rangle$.

Условие **не является необходимым!**

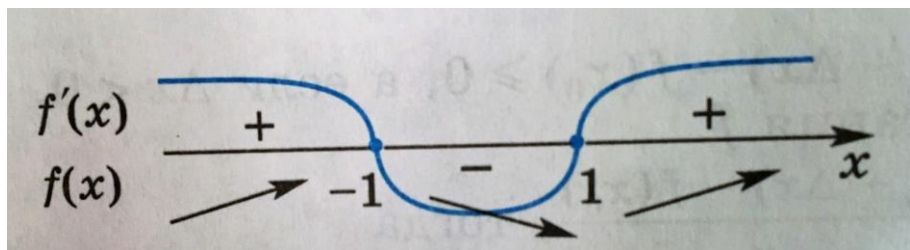
Следствие. Если $f(x) \in C\langle a; b \rangle$ и $f'(x) > 0$ на $(a; b)$, то $f(x) \uparrow$ на $(a; b)$.

Для убывания формулировки аналогичны.

Примеры исследования функции на МОНОТОННОСТЬ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ -1

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$



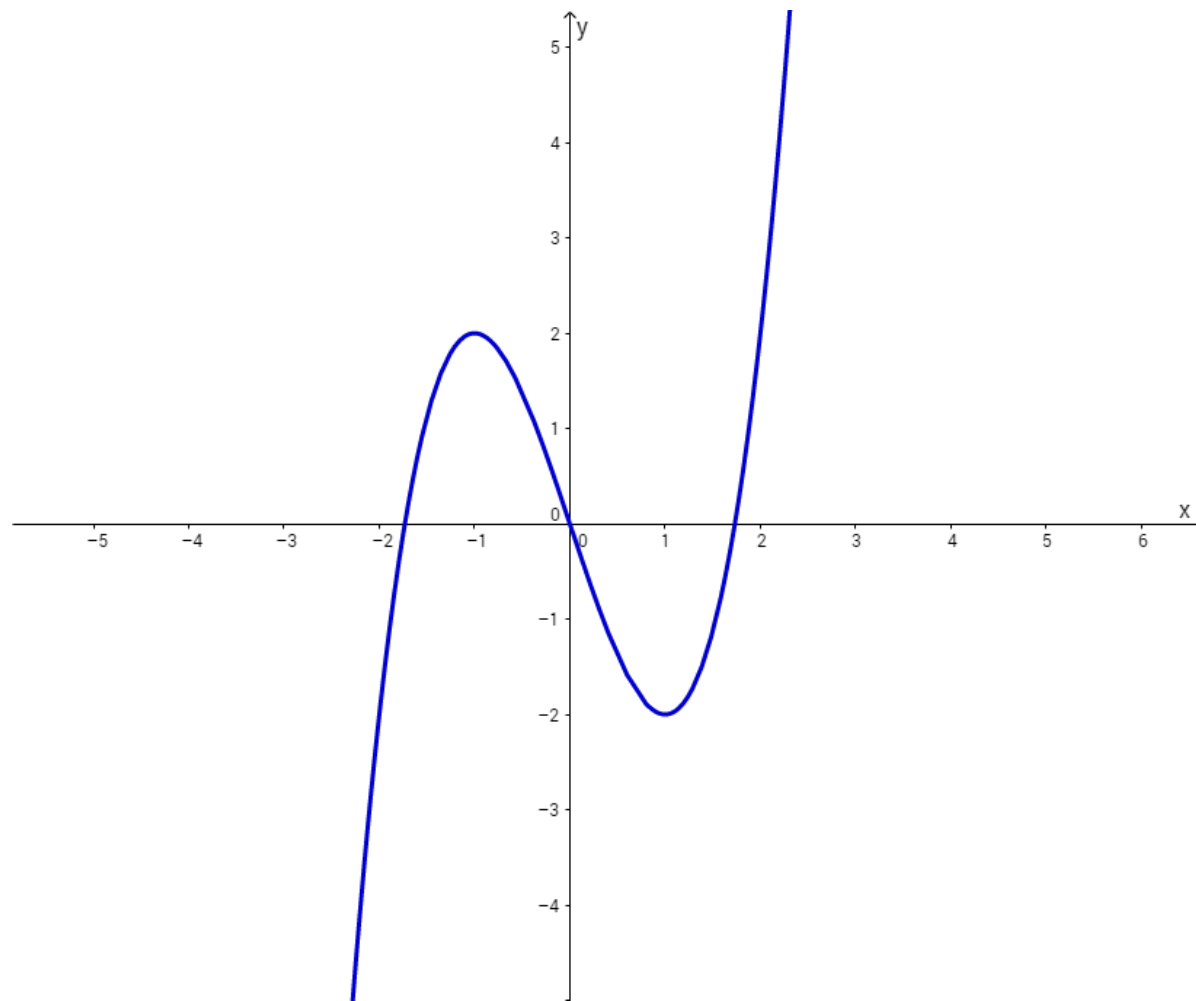
$$f'(x) > 0 \quad x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } x \in (-\infty; -1]$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } x \in [1; +\infty)$$

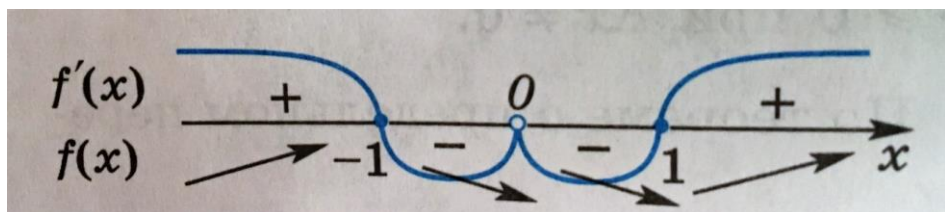
$$f'(x) < 0 \quad x \in (-1; 1)$$

$$f(x) \downarrow \text{ на } x \in [-1; 1]$$



Примеры исследования функции на МОНОТОННОСТЬ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ -2

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$



$$f'(x) > 0 \quad x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

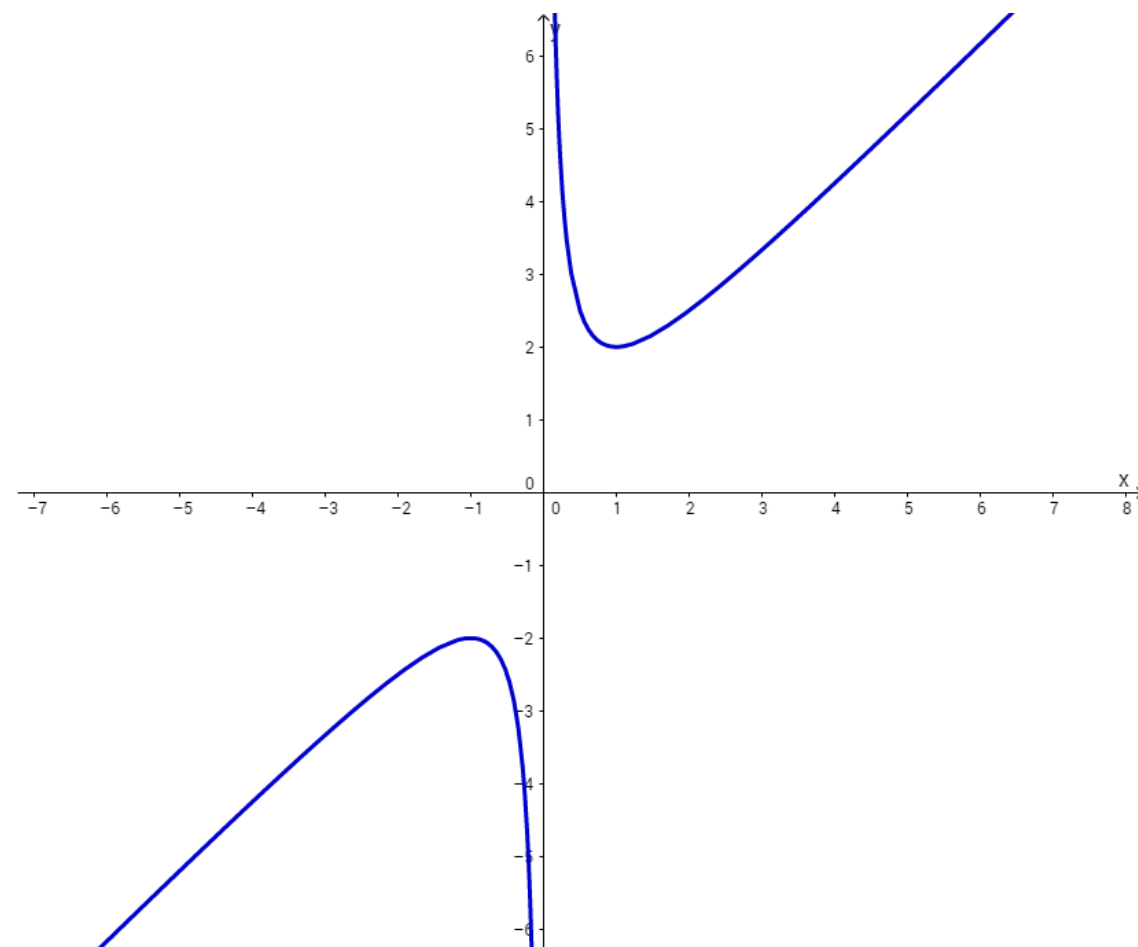
$$f(x) \uparrow \text{ на } x \in (-\infty; -1]$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } x \in [1; +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \quad x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$$

$$f(x) \downarrow \text{ на } x \in [-1; 0)$$

$$f(x) \downarrow \text{ на } x \in (0; 1]$$



Применение производной для доказательства неравенств -1

$\boxed{\sin x \leq x}$ при $x \in (0; +\infty)$ и $\boxed{\sin x \geq x}$ при $x \in (-\infty; 0)$

Доказательство: $f(x) = x - \sin x$

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$$

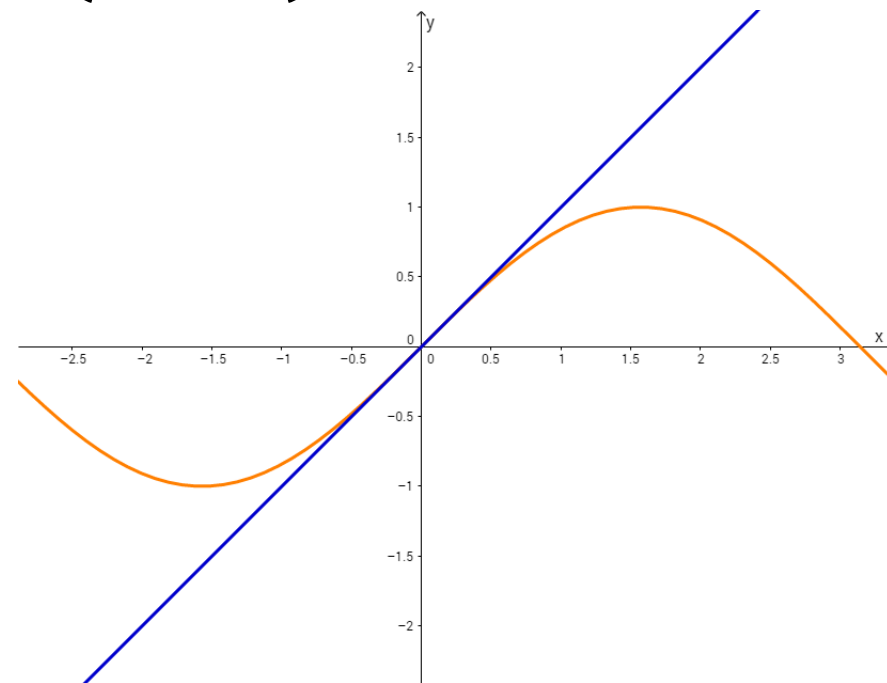
По обратной теореме $f(x) \nearrow$ при $x \in (0; +\infty)$.

$$\text{При } x = 0 \quad f(0) = 0$$

$$f(x) = x - \sin x \geq f(0) = 0 \quad \text{при } \forall x \in (0; +\infty)$$

т.е. $\sin x \leq x$ при $x \in (0; +\infty)$

Второе неравенство доказывается аналогично.



Применение производной для доказательства неравенств -2

$$\boxed{\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}} \text{ при } \forall x \in \mathbb{R}$$

Доказательство: в силу четности достаточно рассмотреть $\forall x \in (0; +\infty)$.

$$f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right), f'(x) = -\sin x + x \geq 0$$

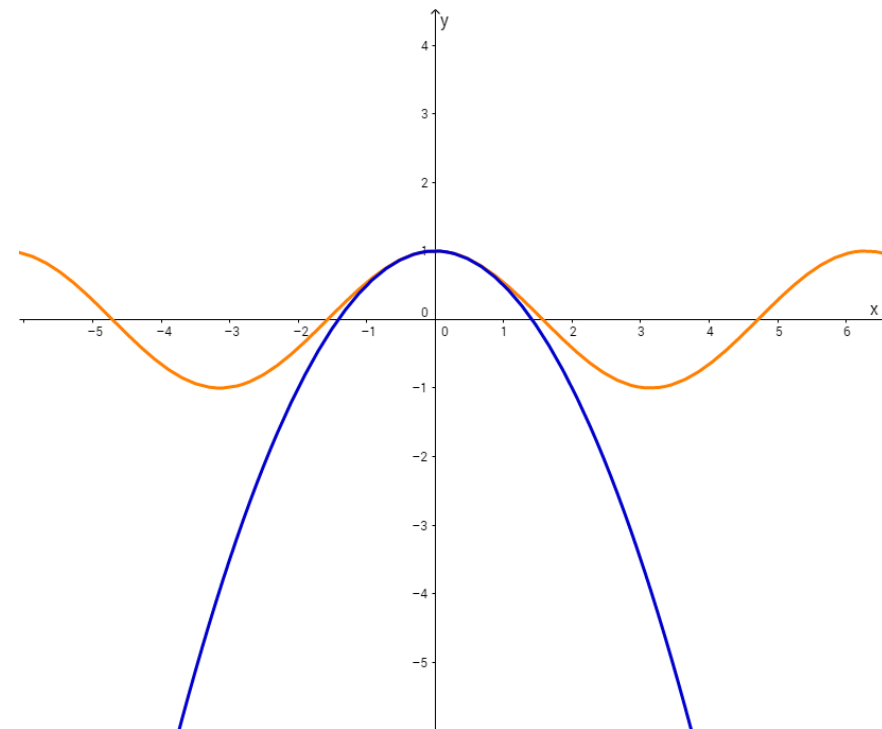
при $\forall x \in (0; +\infty)$

По обратной теореме $f(x) \nearrow$.

$$\text{При } x = 0 \quad f(0) = 0$$

$$f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \geq f(0) = 0 \text{ при } \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\text{т.е. } \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \text{ при } x \in (0; +\infty)$$



Применение производной для доказательства неравенств -3

$$\boxed{\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}} \text{ при } x \in (0; +\infty) \quad \boxed{\sin x \leq x - \frac{x^3}{6}} \text{ при } x \in (-\infty; 0)$$

Доказательство: рассмотрим $\forall x \in (0; +\infty)$.

$$f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$$

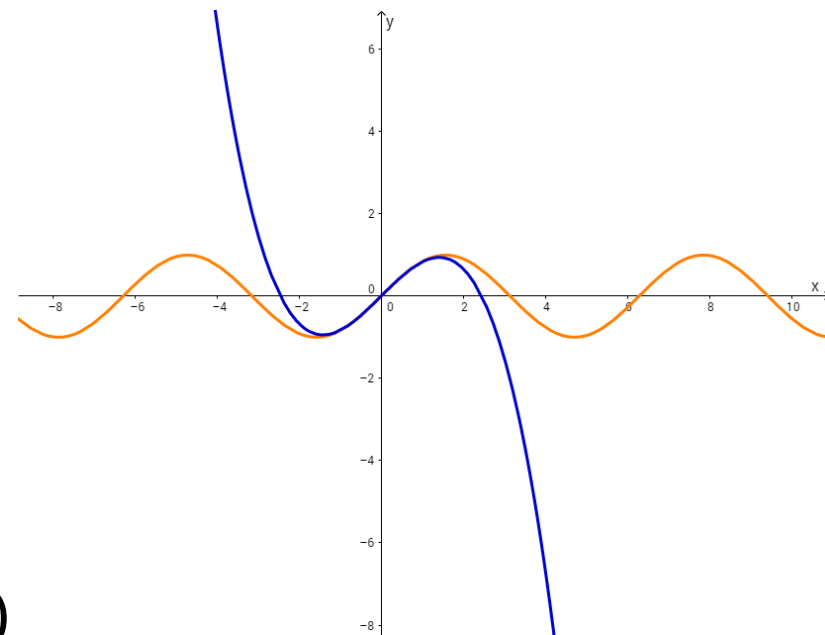
$$f'(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \geq 0 \text{ при } \forall x \in (0; +\infty)$$

По обратной теореме $f(x) \nearrow$ при $\forall x \in (0; +\infty)$.

$$\text{При } x = 0 \quad f(0) = 0$$

$$f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \geq f(0) = 0 \text{ при } \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\text{т.е. } \sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \text{ при } x \in (0; +\infty)$$



Локальные экстремумы функций -1

Опр. Точка $x = a$ называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если $\exists \delta > 0: f(a) \geq f(x)$ при $\forall |x - a| < \delta$

Точка $x = a$ называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если $\exists \delta > 0: f(a) \leq f(x)$ при $\forall |x - a| < \delta$

Это точки локального экстремума функции.

Строгий экстремум:

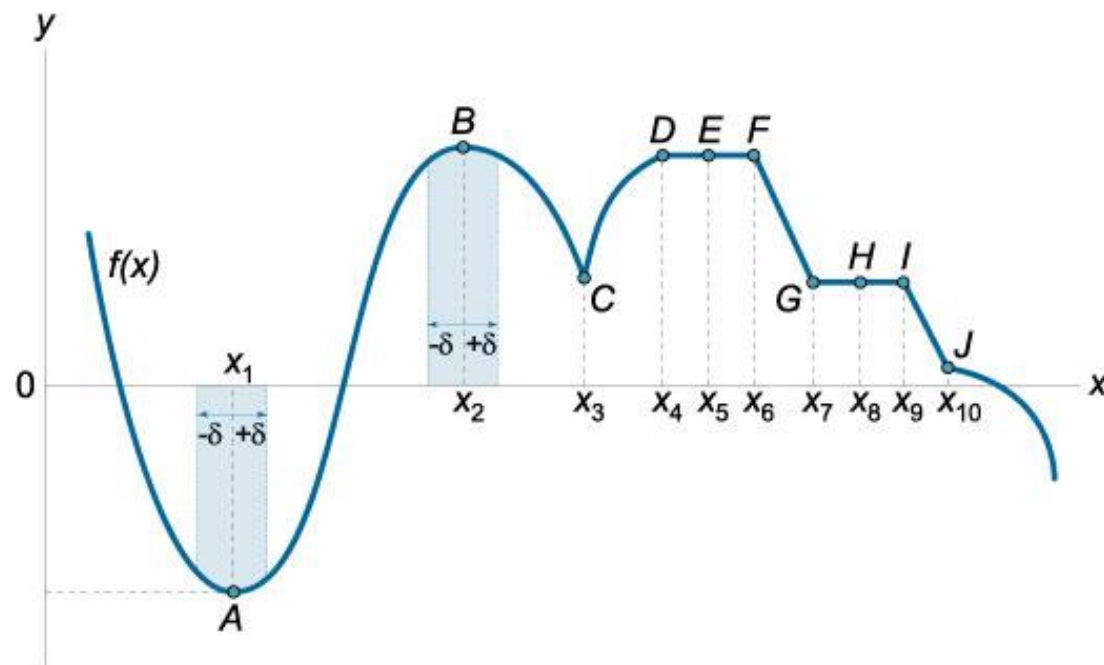
A, B, C

Нестрогий экстремум:

D, E, F, G, H, I

Нет экстремума:

J



Локальные экстремумы функций -2

Теорема Ферма. (Необходимый признак локального экстремума)

Если $x = a$ - точка локального экстремума функции $f(x)$ и $\exists f'(a)$, то $f'(a) = 0$. (Вообще, в точке экстремума или $f'(a) = 0$, или $\nexists f'(a)$).

Доказательство: пусть $x = a$ – локальный максимум, тогда

$$f(x) - f(a) \leq 0 \text{ и } \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0 \text{ при } x > a$$
$$\geq 0 \text{ при } x < a$$

$$\exists f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0, \text{ т.е. } f'(a) = 0.$$

Обратное не верно! это не является достаточным условием локального экстремума.

Контрпример: $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$, но там нет экстремума.

Исследование функции на экстремумы

Опр. Если $f'(a) = 0$, то $x = a$ – стационарная точка функции $f(x)$.

Опр. Если $\nexists f'(a)$, то $x = a$ – критическая точка функции $f(x)$.

Теорема. (Достаточное условие экстремума функции).

Пусть $f(x) \in C(a)$, $f(x) \in D(0 < |x - a| < \delta)$ и $f'(x)$ меняет знак в точке $x = a$, то это точка локального экстремума. Причём, если знак меняет с плюса на минус (слева направо), то это точка локального максимума. А если с минуса на плюс, то это точка локального минимума.

Алгоритм исследования функции на экстремумы

1. Ищем все стационарные и критические точки функции $f(x)$ (для этого вычисляем $f'(x)$, смотрим, где $f'(x) = 0$ и где $\nexists f'(x)$).
2. Методом интервалов ищем промежутки знакопостоянства производной.
3. Выбираем среди стационарных и критических точек те, где производная меняет знак и функция непрерывна. По характеру смены знака определяем характер локального экстремума.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Опр. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и принимает в точке $x_0 \in [a; b]$ такое значение, что $f(x_0) \geq f(x)$ при $\forall x \in [a; b]$, то $f(x_0)$ - наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Опр. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и принимает в точке $x_0 \in [a; b]$ такое значение, что $f(x_0) \leq f(x)$ при $\forall x \in [a; b]$, то $f(x_0)$ - наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке -1

Утв. Если функция $f(x) \in C[a; b]$, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значения или в стационарных точках, или в критических точках, или на концах отрезка.

Утв. Если точка, где функция достигает своего наибольшего значения, находится внутри отрезка, то в этой же точке находится локальный максимум. (Для наименьшего и минимума аналогично.)

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Пусть $f(x) \in C[a; b]$

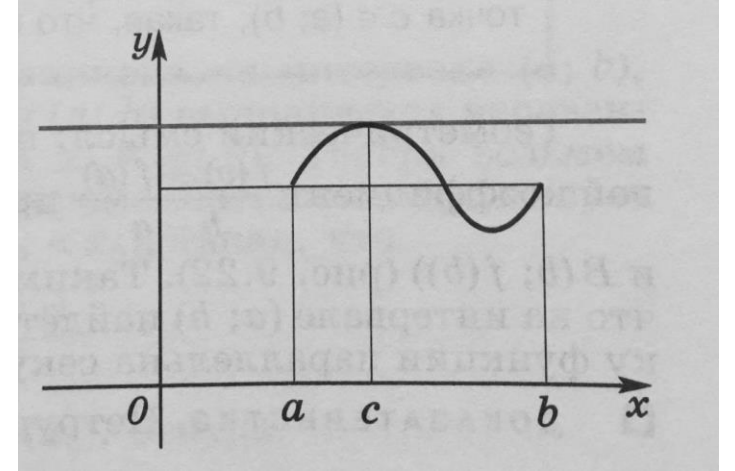
1. Найти $f'(x)$
2. Найти точки, где $f'(x) = 0$ или $\nexists f'(x)$. Отобрать среди них **только те, что лежат на отрезке $[a; b]$**
3. Вычислить значения функции $f(x)$ в этих точках и **на концах отрезка ($f(a)$ и $f(b)$)**. Выбрать среди найденных значений минимальное и максимальное.

Некоторые полезные теоремы

Теорема Ролля.

Если $f(x) \in C[a; b]$, $f(x) \in D(a; b)$, $f(a) = f(b)$,

то $\exists c \in (a; b) : f'(c) = 0$

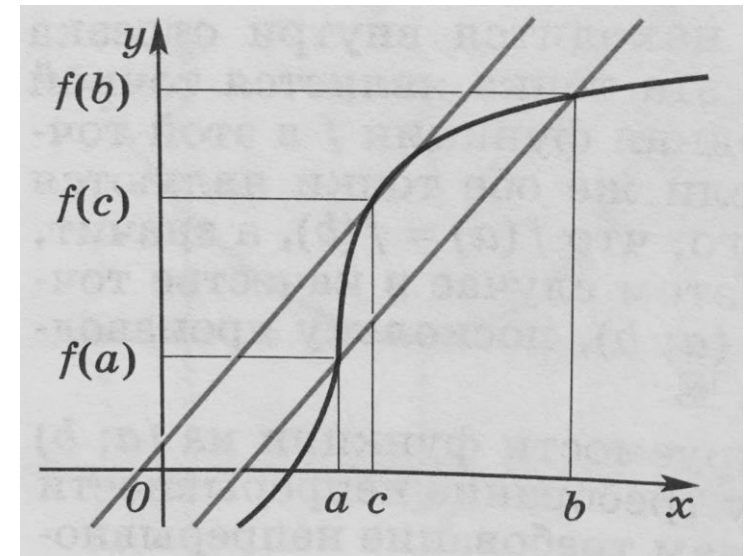


Теорема Лагранжа.

$f(x) \in C[a; b]$, $f(x) \in D(a; b)$,

то $\exists c \in (a; b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(касательная параллельна секущей)

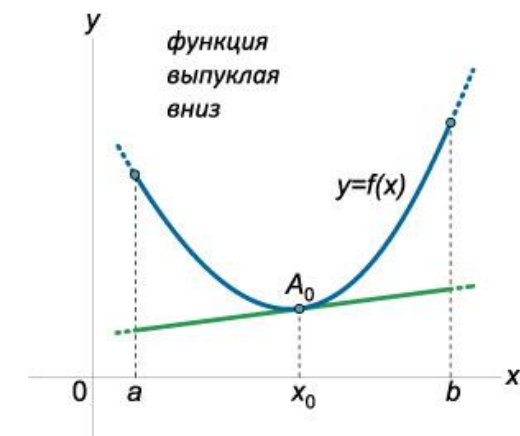
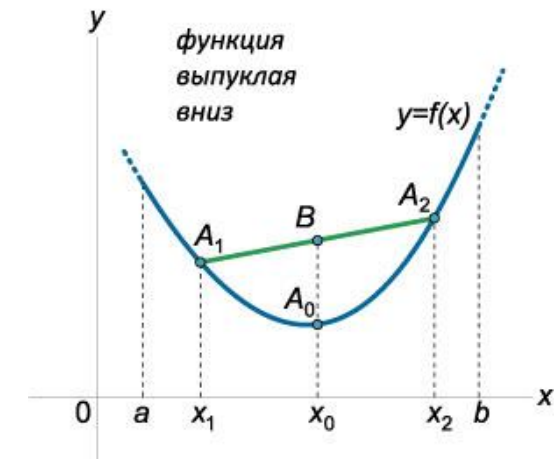


Выпуклая (выпуклая вниз) функция

Опр. 1 Функция $f(x)$ называется выпуклой (выпуклой вниз) на промежутке $\langle a; b \rangle$, если любая хорда ее графика на этом промежутке лежит не ниже графика функции.

Опр. 2 Функция $f(x) \in C[a; b]$ и $f(x) \in D(a; b)$ называется выпуклой (выпуклой вниз) на промежутке $\langle a; b \rangle$, если ее график на этом промежутке лежит не ниже касательной, проведенной к ней в любой точке, т.е.

$$\forall x_0 \in (a; b): \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

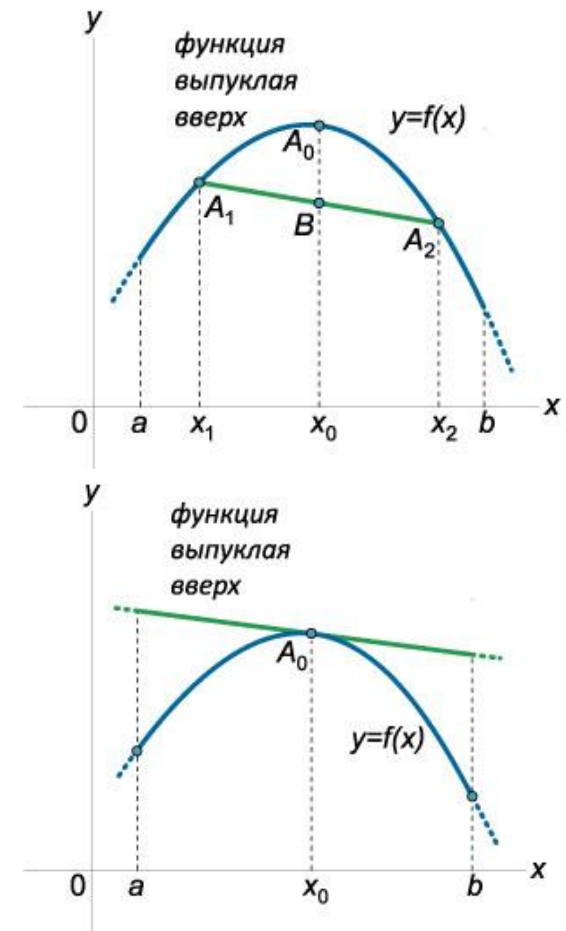


Вогнутая (выпуклая вверх) функция

Опр. 1 Функция $f(x)$ называется вогнутой (выпуклой вверх) на промежутке $\langle a; b \rangle$, если любая хорда ее графика на этом промежутке лежит не выше графика функции.

Опр. 2 Функция $f(x) \in C[a; b]$ и $f(x) \in D(a; b)$ называется вогнутой (выпуклой вверх) на промежутке $\langle a; b \rangle$, если ее график на этом промежутке лежит не выше касательной, проведенной к ней в любой точке, т.е.

$$\forall x_0 \in (a; b): \quad f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

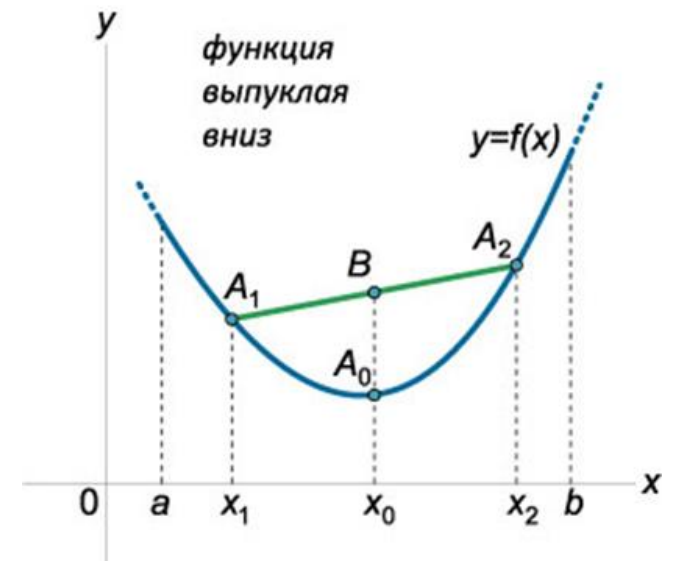
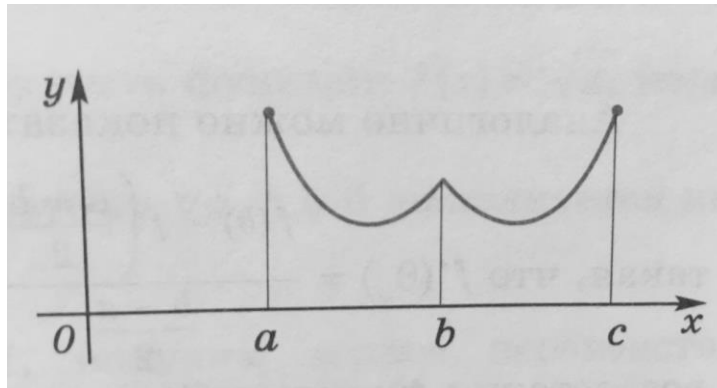


Выпуклость и вогнутость функции

Опр (*). Функция $f(x)$ называется **выпуклой (выпуклой вниз)** на промежутке $\langle a; b \rangle$, если $\forall x \in \langle a; b \rangle f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = A_0 \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = B$.

Замечание. Линейная функция считается одновременно выпуклой и вогнутой.

Утв. Из выпуклости непрерывной функции на двух $[a; b]$ и $[b; c] \Rightarrow$ выпуклость этой функции на $[a; c]$.



Критерий выпуклости функции

Теорема 1. Если $f(x) \in D(a; b)$, $f'(x) \in C(a; b)$, то

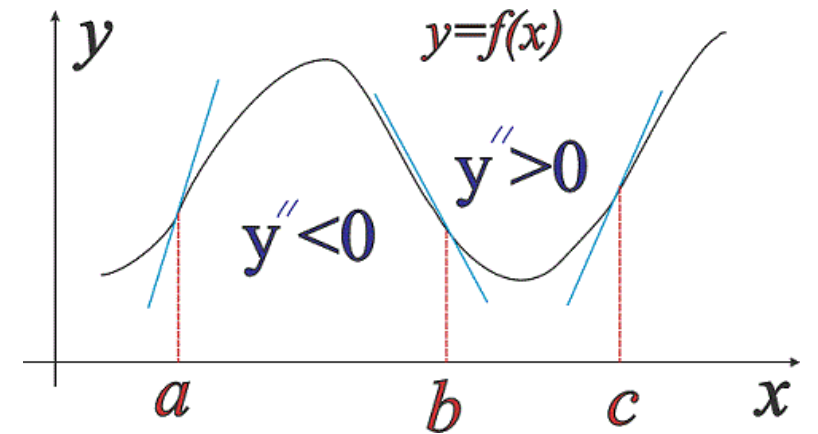
функция выпукла вниз $\Leftrightarrow f'(x) \uparrow$ на $(a; b)$.

функция выпукла вверх $\Leftrightarrow f'(x) \downarrow$ на $(a; b)$.

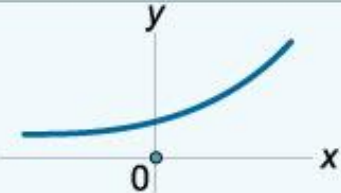
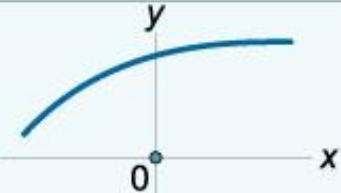
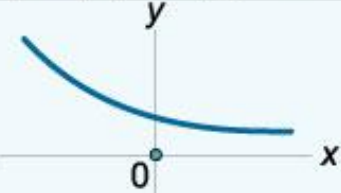
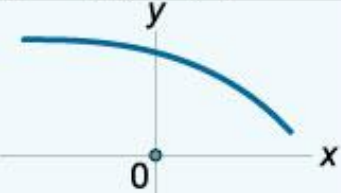
Теорема 2. Если $f(x) \in D^{(2)}(a; b)$, то

функция выпукла вниз $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ на $(a; b)$.

функция выпукла вверх $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ на $(a; b)$.



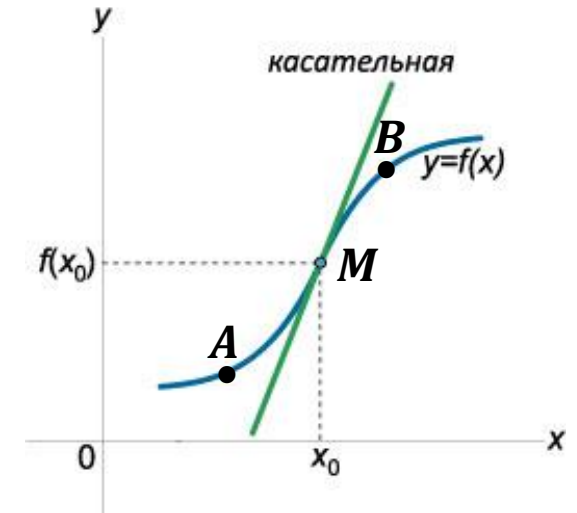
Поведение функции и знаки производных

выпуклость вниз	выпуклость вверх
 $y > 0, y' > 0, y'' > 0$	 $y > 0, y' > 0, y'' < 0$
 $y > 0, y' < 0, y'' > 0$	 $y > 0, y' < 0, y'' < 0$
 $y < 0, y' > 0, y'' > 0$	 $y > 0, y' > 0, y'' < 0$
 $y < 0, y' < 0, y'' > 0$	 $y < 0, y' < 0, y'' < 0$

Точка перегиба функции

Опр. 1 Пусть $f(x) \in C(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$ точка $(x_0; f(x_0))$ называется **точкой перегиба** графика функции $f(x)$, если $\exists \delta > 0$: функция $f(x)$ имеет противоположный характер выпуклости на промежутках $(x_0 - \delta; x_0]$ и $[x_0; x_0 + \delta)$.

Опр. 2 Точка M линии графика функции $f(x)$ называется **точкой перегиба**, если $\exists$ дуга AB этой линии, что $M \in AB$ и дуги AM и MB расположены по разные стороны от касательной, проведенной в точке M к линии графика функции $f(x)$.



Замечание. Каждая точка линейной функции является точкой перегиба.

Критерий точки перегиба функции

Теорема 1. (Необходимое условие точки перегиба)

Если $f(x) \in D(x_0)$, то, чтобы $(x_0; f(x_0))$ являлась точкой перегиба функции $f(x)$, необходимо, чтобы или $f''(x_0) = 0$, или $\nexists f''(x_0)$.

Теорема 2. (Достаточное условие точки перегиба)

Если $f(x) \in D(x_0)$ и $f(x) \in D^{(2)}((x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta))$,
 $f''(x_0) = 0$ и f'' меняет знак при переходе через точку x_0 , то
 $(x_0; f(x_0))$ - точка перегиба функции $f(x)$.

Пример исследования на точки перегиба

Пример.

$$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 + 2$$

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2$$

