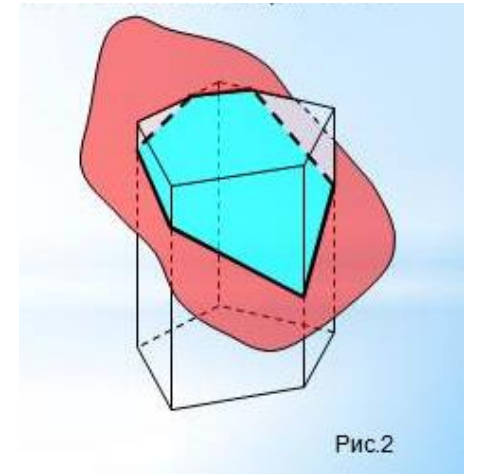
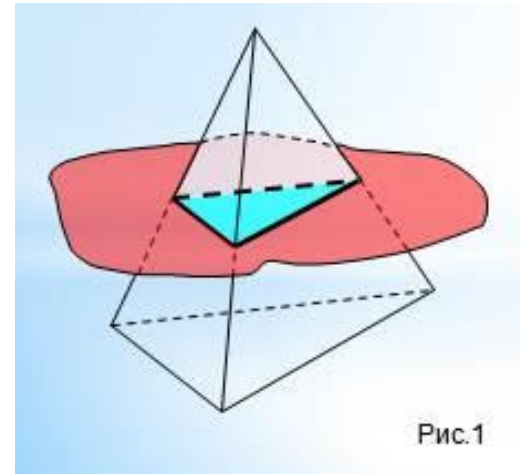
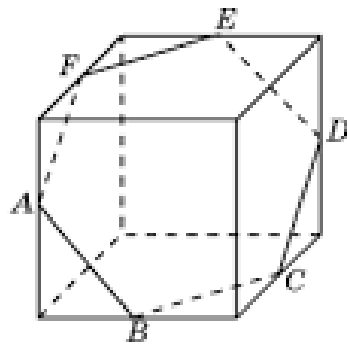
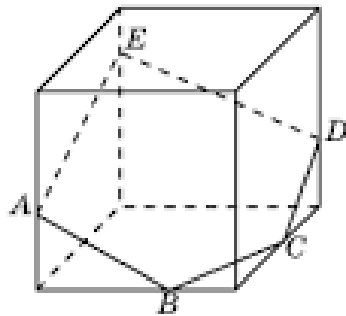
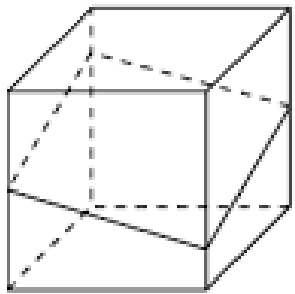


# Построение сечений многогранников

# Понятие сечения

Плоскость, по обе стороны которой имеются точки данного тела, называется секущей плоскостью.

Фигура, которая образуется при пересечении тела плоскостью, называется сечением тела.



# Построение сечений многогранников

Сечение многогранника – это множество всех точек пространства, которые одновременно принадлежат и многограннику, и секущей плоскости. Сечением многогранника является многоугольник.

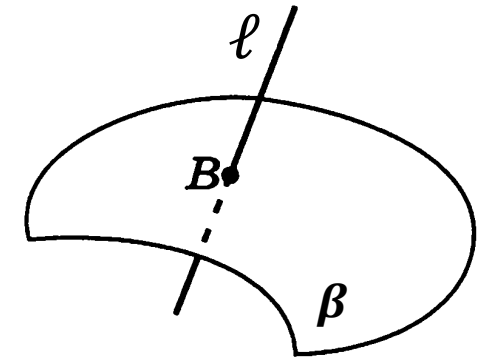
Замечание. Если пересечением плоскости и многогранника является вершина или ребро многогранника, то эту плоскость **не** называют секущей.

Методы построения сечений многогранников:

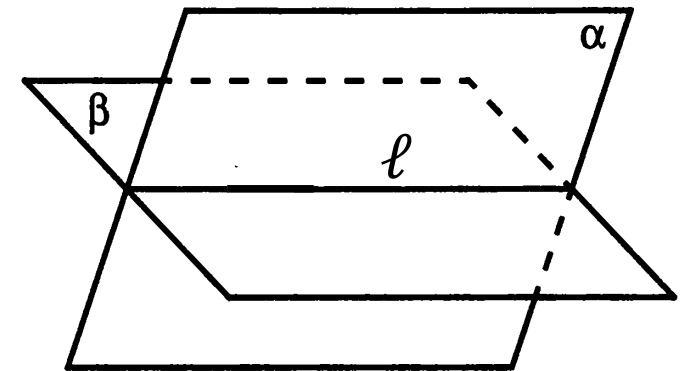
1. метод следов
2. метод внутреннего проектирования (метод соответствий, метод диагональных сечений)
3. метод переноса секущей плоскости
4. комбинированный метод

# Метод следов

**Опр. След прямой  $\ell$  на плоскости  $\beta$**   
( $\ell \not\subset \beta$ ) – это точка  $V \in \beta, V = \ell \cap \beta$ .



**Опр. След плоскости  $\alpha$  на плоскости  $\beta$**   
( $\alpha \neq \beta$ ) – это прямая  $\ell \subset \beta, \ell = \alpha \cap \beta$ .



**Построить сечение многогранника плоскостью** – это значит построить прямые, являющиеся следами пересечения граней многогранника данной плоскостью.

# Метод следов. Алгоритм

1. Строим след секущей плоскости на одной из граней
2. Ищем след соответствующих ребер на секущей плоскости
3. Строим след секущей плоскости на других гранях (при наличии двух следов ребер или их продолжений на секущей плоскости, принадлежащих соответствующей грани)

Вывод: на каждом этапе ищем две точки, принадлежащие секущей плоскости и соответствующей грани.

Если (1) сразу построить невозможно, используем центральное или параллельное проектирование.

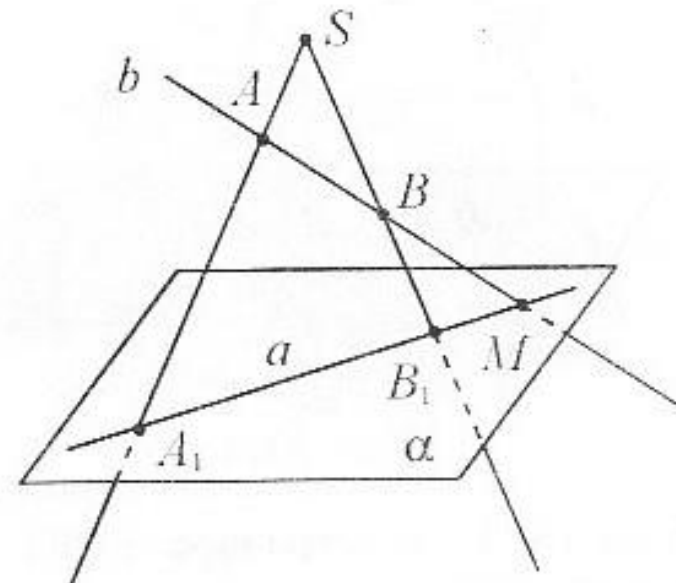
# Центральное проектирование

Центральной проекцией произвольной точки  $A$  пространства на плоскость  $\alpha$  из точки (центра)  $S$  называется точка  $A_1$  пересечения плоскости  $\alpha$  и прямой  $SA$ , т.е.  $A_1 = SA \cap \alpha$ .

Центральной проекцией произвольной прямой  $AB$  пространства на плоскость  $\alpha$  из точки (центра)  $S$  называется прямая  $A_1B_1$ , где  $A_1$  и  $B_1$  - центральные проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\alpha$ , т.е.  $A_1 = SA \cap \alpha$ ,  $B_1 = SB \cap \alpha$ .

Утв. Точка  $M = AB \cap A_1B_1$  - след прямой  $AB$  на плоскости  $\alpha$ .

Прямая  $A_1B_1 = (ABS) \cap \alpha$  - след плоскости  $(ABS)$  на плоскости  $\alpha$



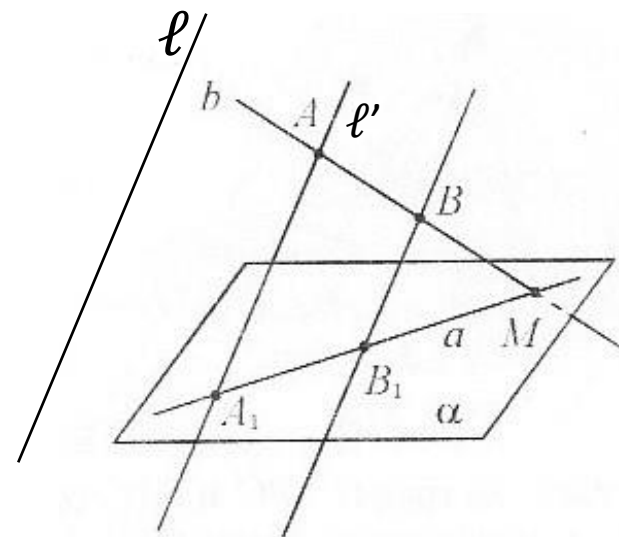
# Параллельное проектирование

Параллельной проекцией произвольной точки  $A$  пространства на плоскость  $\alpha$  в направлении прямой  $\ell$  называется точка  $A_1$  пересечения плоскости  $\alpha$  и прямой  $\ell'$ :  $A \in \ell'$ ,  $\ell' \parallel \ell$ , т.е.  $A_1 = \ell' \cap \alpha$ .

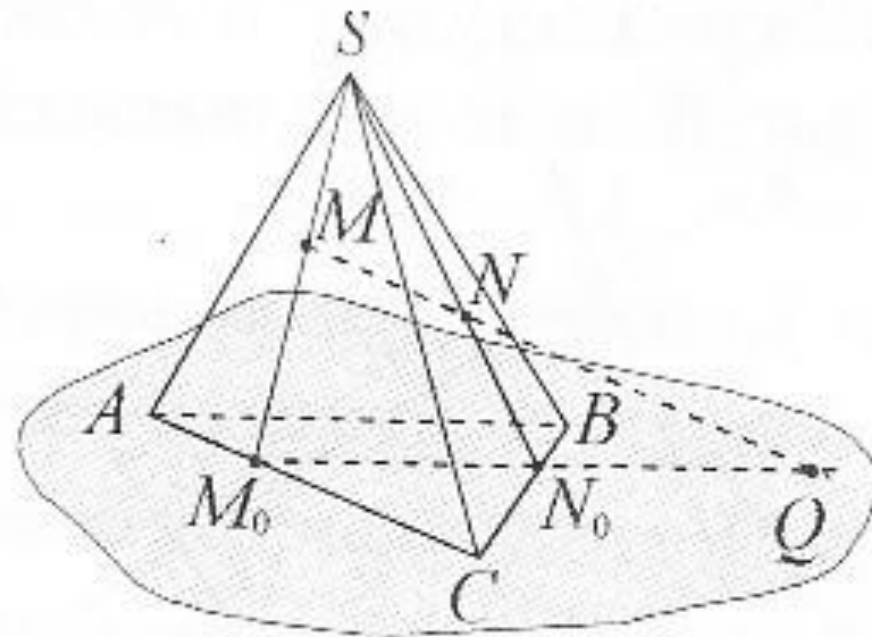
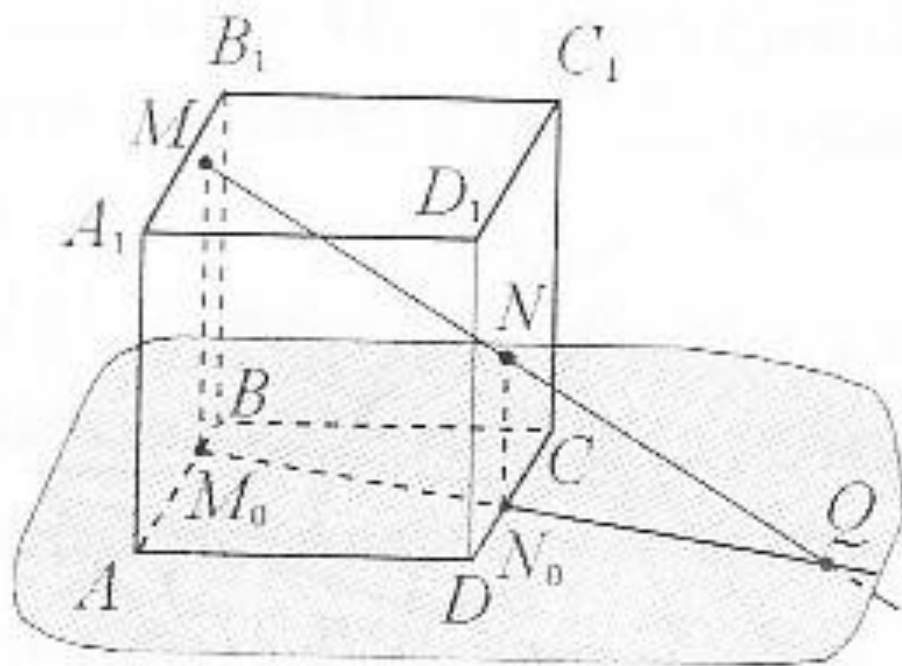
Параллельной проекцией произвольной прямой  $AB$  пространства на плоскость  $\alpha$  в направлении прямой  $\ell$  называется прямая  $A_1B_1$ , где  $A_1$  и  $B_1$  - параллельные проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\alpha$ .

Утв. Точка  $M = AB \cap A_1B_1$  -  
след прямой  $AB$  на плоскости  $\alpha$ .

Прямая  $A_1B_1 = (ABA_1) \cap \alpha$  -  
след плоскости  $(ABA_1)$  на плоскости  $\alpha$



# Метод следов. Использование принципов центрального и параллельного проектирования





# Метод внутреннего проектирования

1. На плоскости основания многогранника отметить 4 точки: три проекции (центральные или параллельные) трех точек, определяющих плоскость сечения и одна должным образом выбранная вершина основания, принимаемая за проекцию одной из вершин сечения.
2. На плоскости основания провести диагонали полученного четырехугольника.
3. На одной из прямых сечения построить точку, проекцией которой служит точка пересечения диагоналей указанного четырехугольника.
4. Найденная точка вместе с одной из трех данных точек этого сечения определяет прямую, которая в пересечении с соответствующим ребром многогранника дает точку пересечения секущей плоскости с этим ребром.

# Замечание

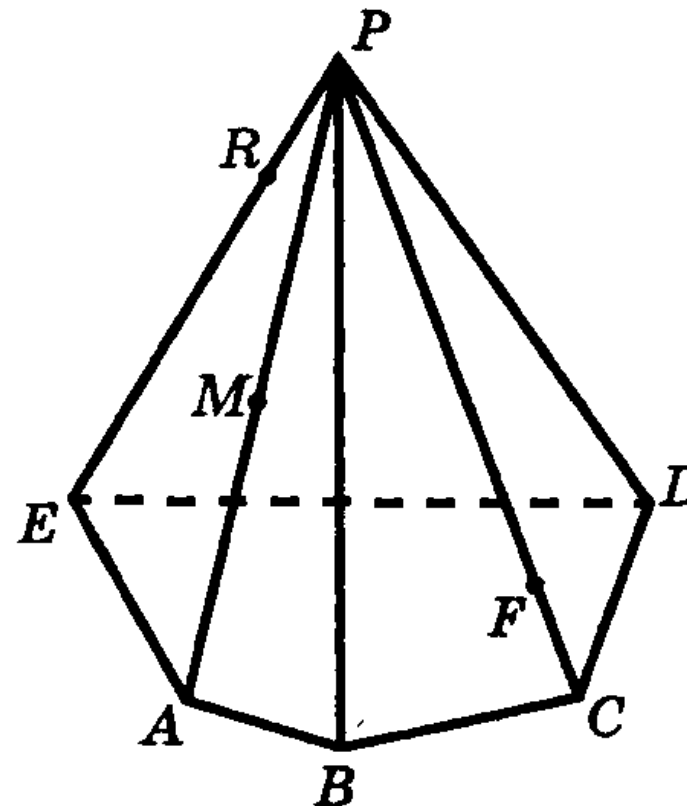
Метод внутреннего проектирования удобно использовать, когда след секущей плоскости не помещается на чертеже, т.к. секущая плоскость составляет малый угол с плоскостью основания.

# Пример. Метод внутреннего проектирования

Дано: пирамида  $PABCDE$ ,

$F \in PC, M \in AP, R \in EP$ .

Требуется: Построить сечение  $\delta$   
пирамиды  $PABCDE$  плоскостью  
( $FMR$ )



# Пример.

## Метод внутреннего проектирования -1

1.  $MR, MR \subset \delta$

2. Рассмотрим точки

$A$  – центральная проекция точки  $M$  на  $(ABC)$

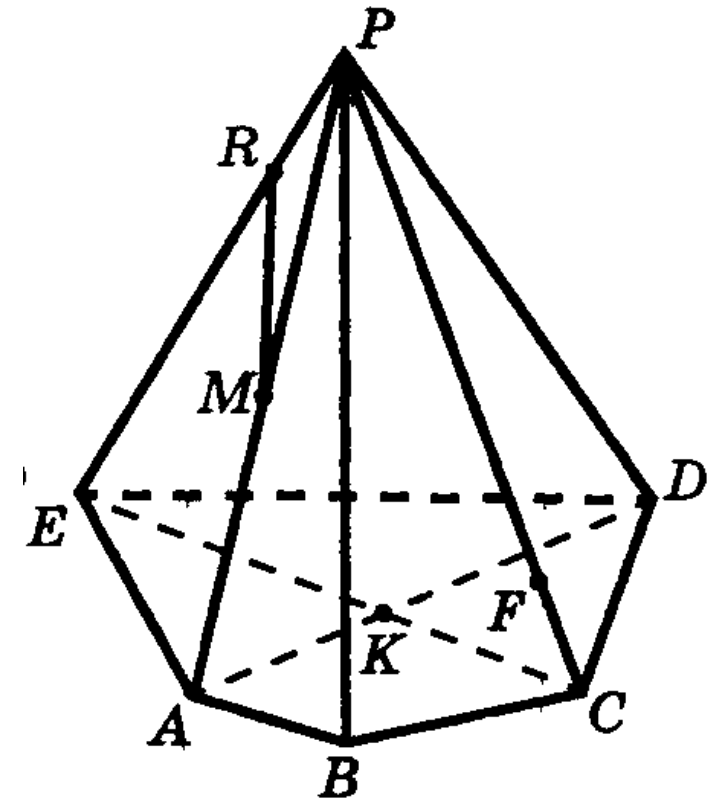
$C$  – центральная проекция точки  $F$  на  $(ABC)$

$E$  – центральная проекция точки  $R$  на  $(ABC)$

$D$  – вершина основания (т.к. хотим на  $PD$  найти след секущей плоскости)

$(CPE) \cap (ADE) = CE$  и  $(APD) \cap (ADE) = AD$

3.  $AD \cap CE = K$



# Пример.

## Метод внутреннего проектирования -2

4.  $RF$

$$RF \subset \delta, \quad RF \subset (CPE)$$

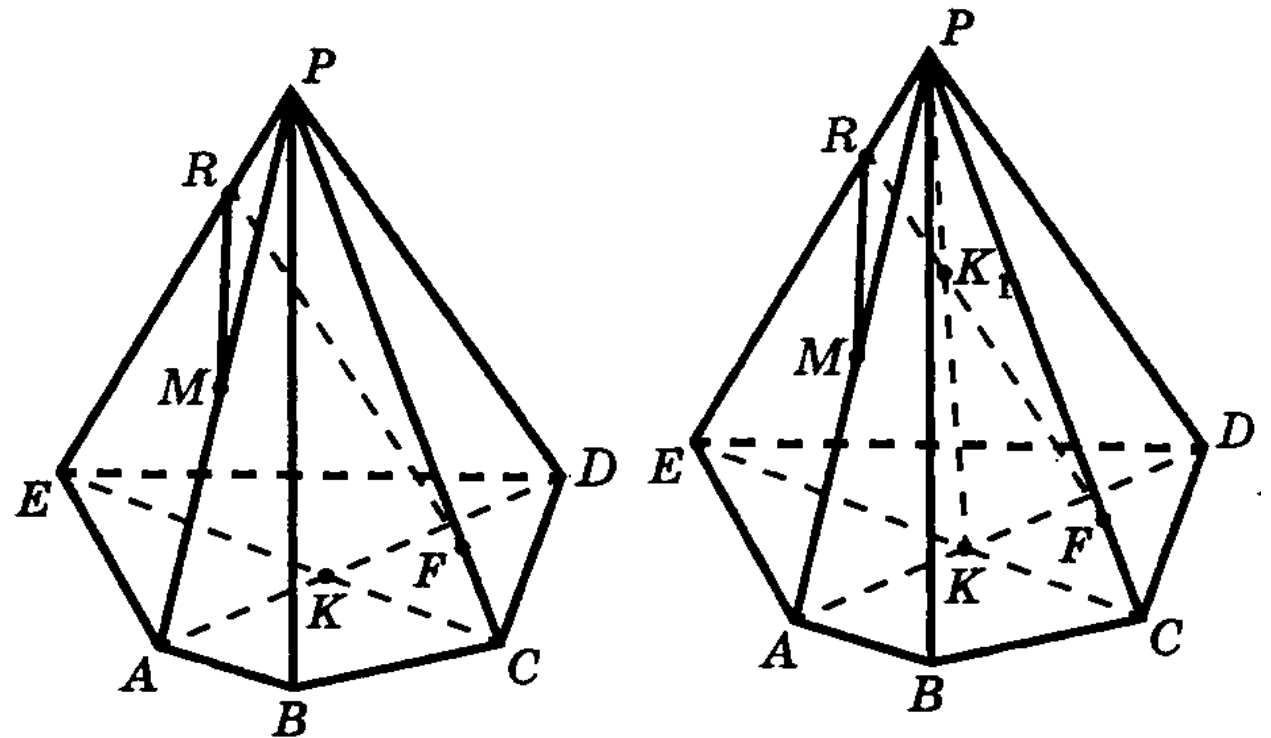
5.  $PK$

$$PK \subset (CPE), \quad PK \subset (APD)$$

6.  $K_1 = PK \cap RF$

$$K_1 \in (CPE), \quad K_1 \in (APD)$$

$$K_1 \in \delta$$



# Пример.

## Метод внутреннего проектирования -3

7.  $MK_1$

$MK_1 \subset (APD)$

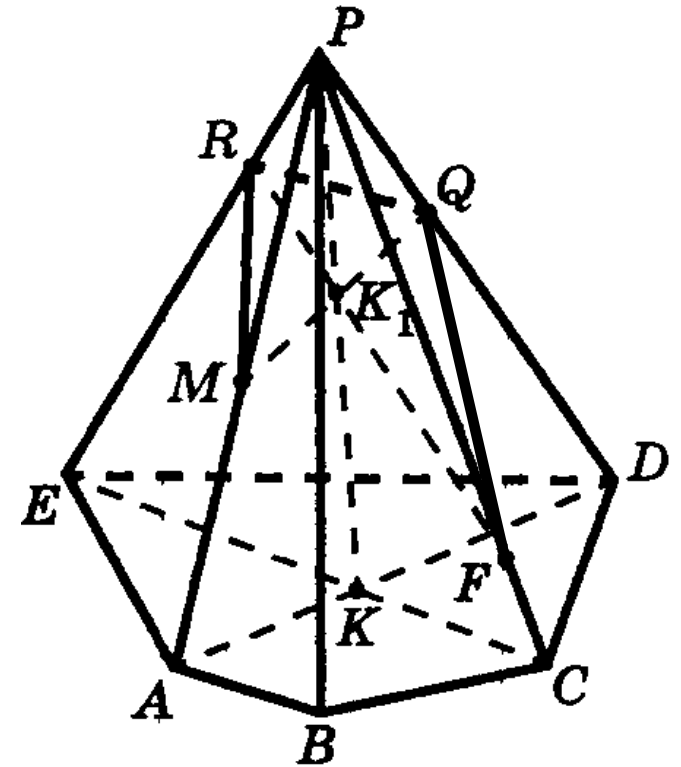
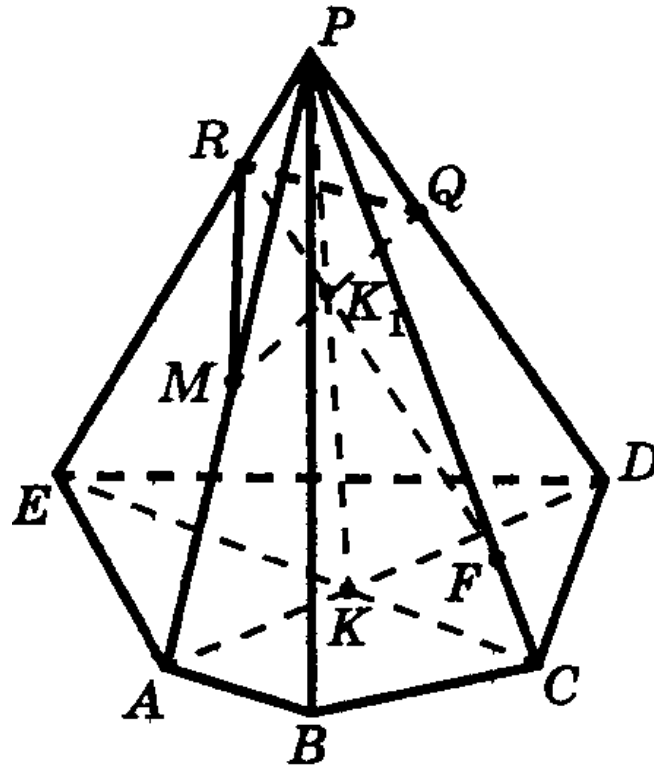
$MK_1 \subset \delta$

8.  $Q = MK_1 \cap PD$

$Q \in \delta$

9.  $RQ, RQ \subset \delta$

10.  $QF, QF \subset \delta$



# Пример.

## Метод внутреннего проектирования -4

11. Рассмотрим точки

$A$  – центральная проекция точки  $M$  на  $(ABC)$

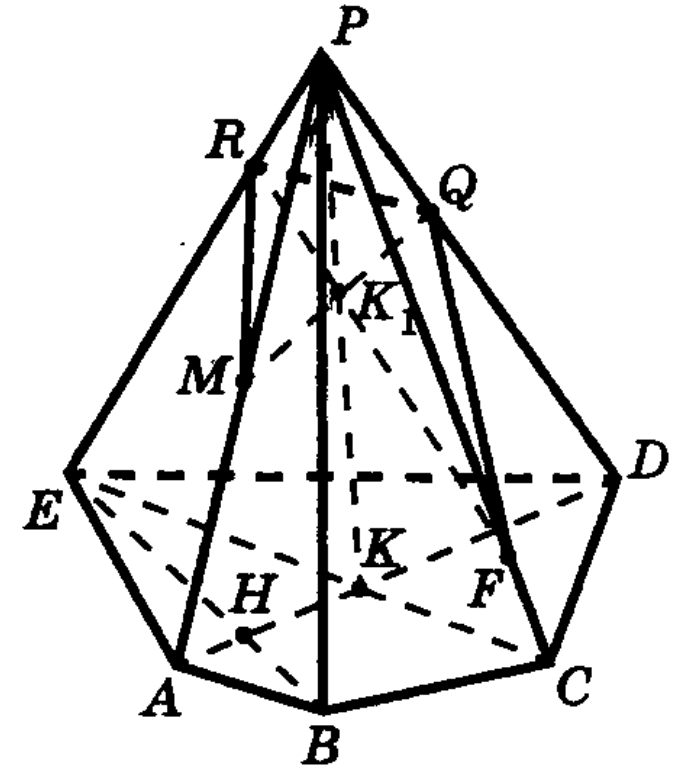
$D$  – центральная проекция точки  $Q$  на  $(ABC)$

$E$  – центральная проекция точки  $R$  на  $(ABC)$

$B$  – вершина основания (т.к. хотим на  $PB$  найти след секущей плоскости)

$(APD) \cap (ADE) = AD$  и  $(BPE) \cap (BDE) = BE$

12.  $AD \cap BE = H$



# Пример.

## Метод внутреннего проектирования -5

13. рассмотрим  $MQ$ :

$$MQ \subset \delta, \quad MQ \subset (APD)$$

14.  $PH$

$$PH \subset (BPE), \quad PH \subset (APD)$$

15.  $H_1 = PH \cap MQ$

$$H_1 \in (BPE), \quad H_1 \in (APD)$$

$$H_1 \in \delta$$

