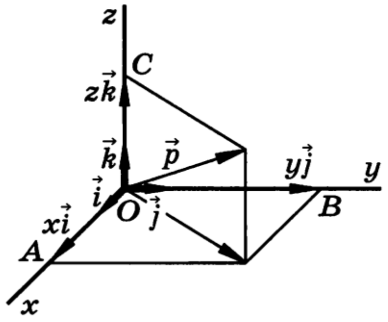
Координатный метод в пространстве

Декартова прямоугольная система координат в пространстве

Опр. Декартовым ортонормированным базисом в пространстве называют упорядоченную тройку отложенных от одной точки O ненулевых некомпланарных векторов $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ таких, что $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$ и $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.



Точка O – начало системы координат.

Базисные вектора задают направления координатных осей.

Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат.

Пары координатных осей задают три координатные плоскости (Oxy, Oxz, Oyz).

Таким образом задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$.

Координаты вектора в пространстве

Опр. Разложением произвольного вектора $\vec{a}$ по декартовому ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ называется представление вида $\boxed{\vec{a} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$, где $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – базис (такие базисные векторы - орты), $(x; y; z)$ - координаты (скалярные величины).

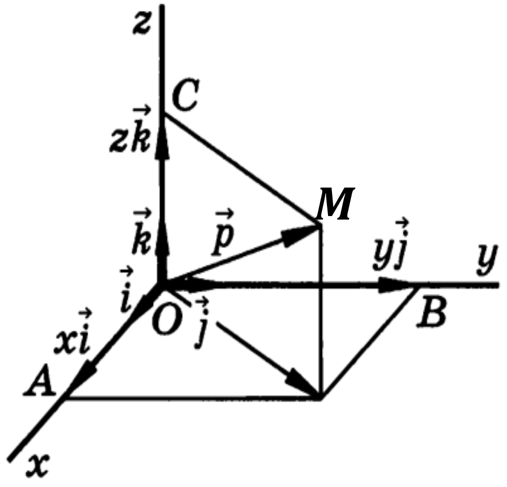
Обозначение: $\vec{a}\ (x; y; z)$

Координаты базисных векторов:

$\vec{i}\ (1; 0; 0)$, $\vec{j}\ (0; 1; 0)$, $\vec{k}\ (0; 0; 1)$

Нулевой вектор: $\vec{0}\ (0; 0; 0)$

$\overrightarrow{OM}$ - радиус-вектор для точки M.



Действия над векторами в координатах

$\forall\vec{a}\ (x_1; y_1; z_1)$ и $\forall\vec{b}\ (x_2; y_2; z_2)$

$$\left(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right)(x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)=\overrightarrow{(x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)}$$

$$\left(\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}\right)(x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2)=\overrightarrow{(x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2)}$$

Каждая координата суммы (разности) двух векторов есть сумма (разность) одноименных координат этих векторов.

$$\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{a}}\ (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)=\overrightarrow{(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)}$$

Каждая координата произведения вектора на число есть произведение этого числа на одноименную координату этого вектора.

Признак коллинеарности векторов в координатах

$\vec{a}\ (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\ (x_2; y_2; z_2)$

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}$$

Вектора коллинеарны $\Leftrightarrow$ их одноименные координаты пропорциональны.

<u>Замечание:</u> допускается формальная запись пропорциональности векторов с одноименными нулевыми координатами, например:

$\vec{a}\ (3; 0; -2\ )$ и $\vec{b}\ (-6; 0; 4\ )$

$$\frac{3}{-6} = \frac{0}{0} = \frac{-2}{4}$$

Признак компланарности векторов в координатах

$\vec{a}\ (x_1; y_1; z_1), \vec{b}\ (x_2; y_2; z_2)$ и $\vec{c}\ (x_3; y_3; z_3)$

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \neq 0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$: $\quad \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

<u>В координатной форме</u>:

Система $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0 \end{cases}$ имеет ненулевое решение (α, β, γ).

Скалярное произведение векторов в координатах

$\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$, т.е. $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$

$$= x_1\, x_2\, \vec{i}^{\,2} + x_1\, y_2\, \vec{i}\,\vec{j} + x_1\, z_2\, \vec{i}\vec{k} + y_1\, x_2\, \vec{i}\,\vec{j} + y_1\, y_2\vec{j}^{\,2} + y_1\, z_2\, \vec{j}\,\vec{k} +$$

$$+ z_1\, x_2\, \vec{i}\,\vec{k} + z_1\, y_2\, \vec{j}\,\vec{k} + z_1\, z_2\vec{k}^{\,2} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2}$$

<u>Условие ортогональности векторов в координатах:</u>

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \boxed{x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2 = 0}$$

Длина вектора и косинус угла между векторами в координатах

$\vec{a}\ (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\ (x_2; y_2; z_2)$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

$$\boxed{\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1\, x_2 +\ y_1\, y_2 +\ z_1\, z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

Проекция вектора на ось в координатах

$\vec{a}\ (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\ (x_2; y_2; z_2)$

<u>Опр.</u> <u>Проекция (ортогональная) вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$</u> - это число

$$Pr_{\perp\vec{b}}(\vec{a}) = |\vec{a}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = |\vec{a}| Pr_{\perp\vec{a}}(\vec{b}) = |\vec{b}|\, Pr_{\perp\vec{b}}(\vec{a})$$

$$Pr_{\perp\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \qquad\qquad Pr_{\perp\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

$$x_1 = Pr_{\perp\vec{i}}(\vec{a}) \qquad y_1 = Pr_{\perp\vec{j}}(\vec{a}) \qquad z_1 = Pr_{\perp\vec{k}}(\vec{a})$$

Координаты вектора – это ортогональные проекции вектора на направление соответствующего базисного вектора.

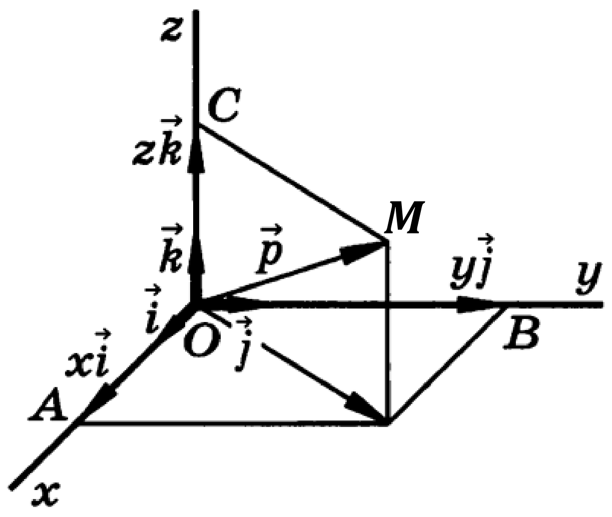
Декартовы прямоугольные координаты точки

$\overrightarrow{OM}$ - радиус-вектор для точки M

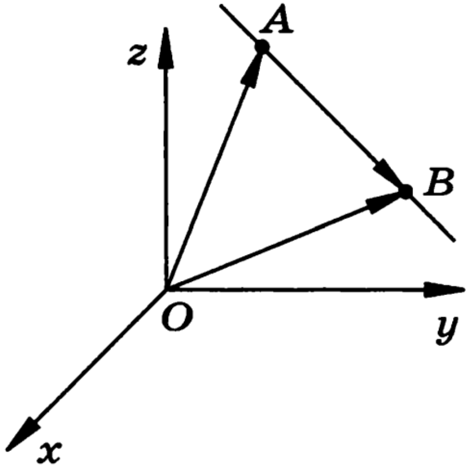
$$\overrightarrow{OM} = \vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$(x; y; z)$ - координаты точки M в системе координат $Oxyz$

Опр. Координаты точки – это координаты ее радиус вектора в заданной системе координат.



Расстояние между двумя точками в координатах



Рассмотрим точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$

<u>Найти:</u> длину отрезка AB

Радиус-векторы: $\overrightarrow{OA}(x_1; y_1; z_1)$ и $\overrightarrow{OB}(x_2; y_2; z_2)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

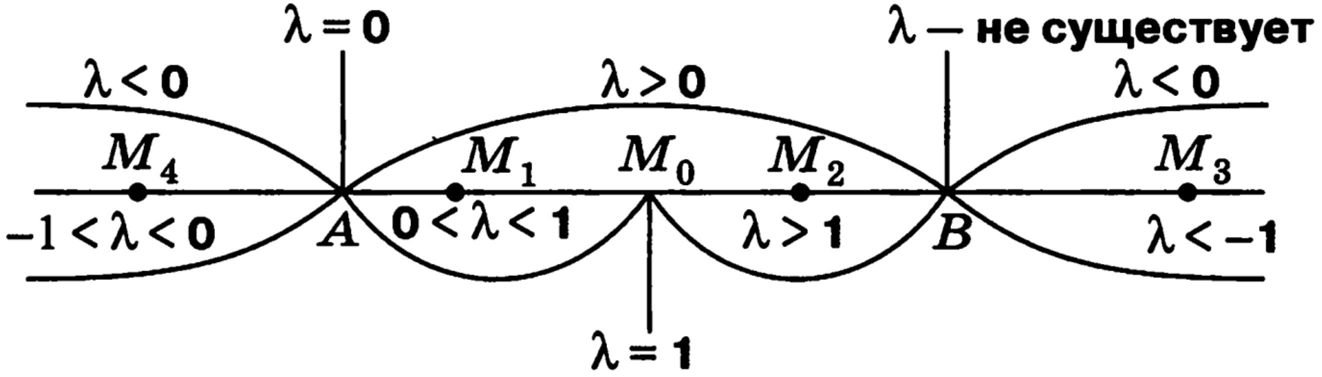
Деление отрезка в данном отношении в координатах -1

Рассмотрим отрезок AB и точка $M \in AB$ (на прямой, а не обязательно на отрезке)

<u>Опр.</u> Точка M <u>делит отрезок</u> AB <u>в отношении</u> $\lambda \neq -1$, если $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ и $\langle AB; M\rangle = \lambda$

A и B – <u>базисные точки</u>, M – <u>делящая точка</u>

<u>Замечание:</u> $M \in [AB]$ при $\lambda > 0$



Деление отрезка в данном отношении в координатах -2

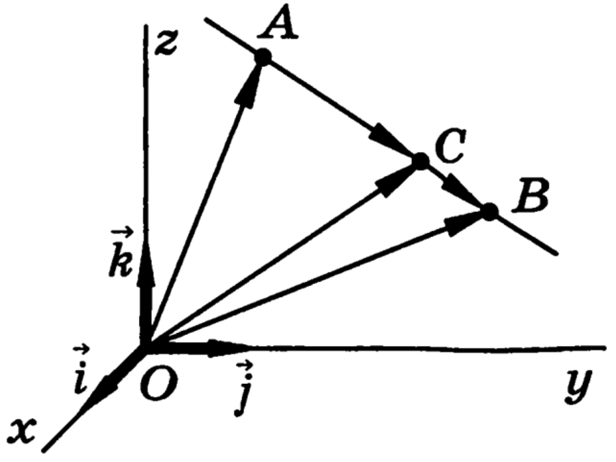
Рассмотрим точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ и $C(x; y; z)$

Радиус-векторы: $\overrightarrow{OA}(x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{OB}(x_2; y_2; z_2)$, $\overrightarrow{OC}(x; y; z)$

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$$

$$(1+\lambda)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OB}$$

$$\boxed{x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}}$$



<u>Координаты середины отрезка</u>:

$$\boxed{x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1+z_2}{2}}$$

Задание фигур в пространстве уравнениями и неравенствами

<u>Опр.</u> Уравнение $f(x, y, z) = 0$ называется <u>уравнением поверхности</u> Φ, если этому уравнению удовлетворяют координаты (x, y, z) $\forall$ точки этой поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства, не принадлежащей поверхности Φ.

Если $f(x, y, z)$ - многочлен, то его степень – <u>порядок поверхности</u> Φ.

Система уравнений вида $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ задает пересечение двух поверхностей, т.е. <u>линию (кривую)</u>.

<u>Фигуры</u> в пространстве могут быть заданы неравенствами вида $f(x, y, z) \geq 0$ или $f(x, y, z) \leq 0$

Уравнение сферы

Уравнение сферы с центром в точке $(a; b; c)$ радиуса R:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

Это поверхность второго порядка.

Напоминание: на плоскости рассматривали кривые второго порядка, которые задаются уравнением второго порядка вида:

$$a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0=0$$

Пример: $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$

Сфера, центр $(1; -2; 3)$, радиус 5.

Задание шара в координатах. Поверхности второго порядка

Шар с центром в точке $(a; b; c)$ радиуса R задается неравенством вида:

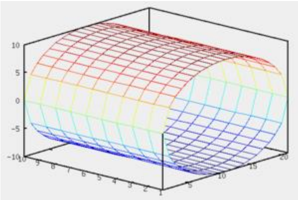
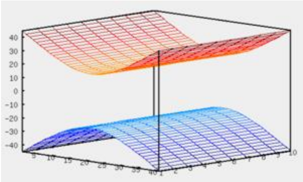
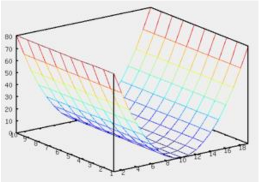
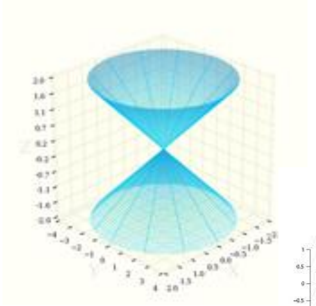
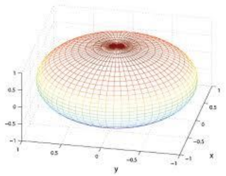
$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq R^2}$$

Поверхности второго порядка:

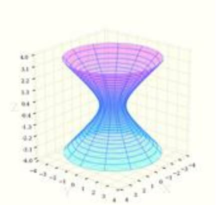
1. Цилиндрические (эллиптический, гиперболический и параболический цилиндр)
2. Конические
3. Поверхности вращения (эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоид)
4. Эллиптический и гиперболический параболоид

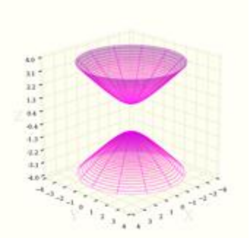
Поверхности второго порядка

1. Цилиндрические (эллиптический, гиперболический и параболический цилиндр)

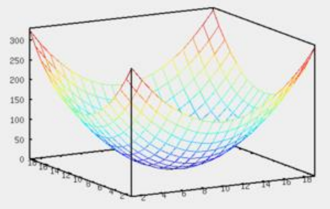
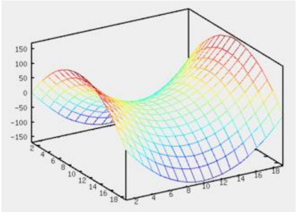
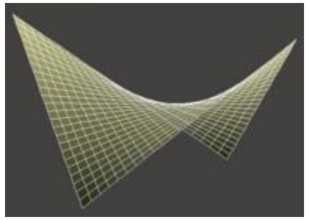






2. Конические
3. Поверхности вращения (эллипсоид, однополостный гиперболоид (линейчатая поверхность) и двуполостный гиперболоид)





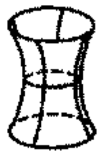
4. Эллиптический параболоид (в частном случае может быть поверхностью вращения) и гиперболический параболоид (линейчатая поверхность)

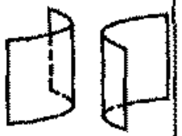
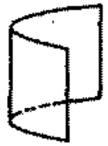




Примеры поверхностей в координатах

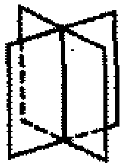
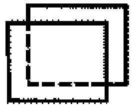
1. $y = 0$ Плоскость
2. $x = -7$ Плоскость
3. $y^2 + 4y + 4 = 0$ Плоскость
4. $y^2 + 4y + 4 = z$ Цилиндрическая поверхность
5. $z \cdot x = 0$ Две плоскости (перпендикулярные)
6. $z^2 - 4z = 0$ Две плоскости (параллельные)
7. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ Точка
8. $x^2 + y^2 = 4$ Цилиндр (круговой)
9. $x^2 - y^2 = 0$ Пара пересекающихся плоскостей

Поверхности второго порядка -1

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Эллипсоид (в частности, эллипсоид вращения и сфера)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Двухполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Эллиптический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	
Гиперболический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$	
Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$	

Поверхности второго порядка -2

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	
Пара параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	
Пара совпадающих плоскостей	$x^2 = 0$	
Мнимый конус второго порядка с действительной вершиной (0; 0; 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	
Пара мнимых плоскостей (пересекающихся по действительной прямой)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	
Пара мнимых параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = -1$	

Векторное уравнение плоскости

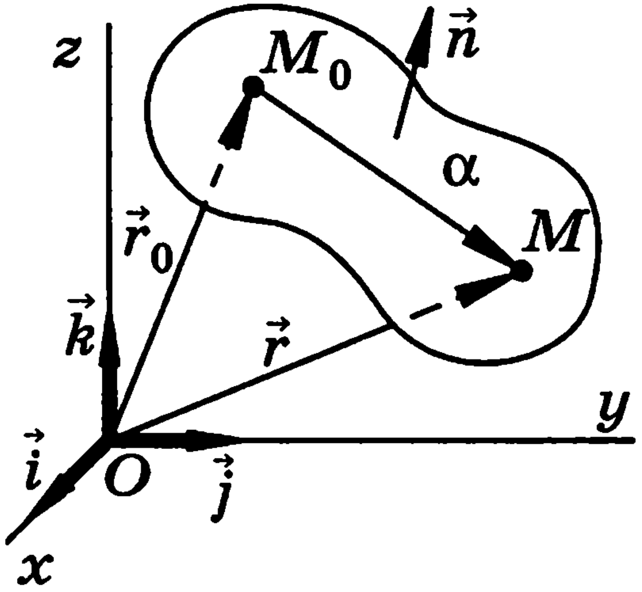
Дано: точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор нормали $\vec{n}(A, B, C) \neq \vec{0}$
(т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Плоскость α: $M_0 \in \alpha, \vec{n} \perp \alpha$

Рассмотрим $\forall M(x, y, z) \in \alpha, M \neq M_0$

$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0}$$



Это - **векторное уравнение плоскости**

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали

Дано: точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор нормали $\vec{n}(A, B, C) \neq \vec{0}$
(т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Плоскость α: $M_0 \in \alpha, \vec{n} \perp \alpha$

Рассмотрим $\forall M(x, y, z) \in \alpha, M \neq M_0$

$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, т.е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

Это - **уравнение плоскости по точке и вектору нормали**

Общее уравнение плоскости

Дано: точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор нормали $\vec{n}(A, B, C) \neq \vec{0}$ (т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Плоскость α: $M_0 \in \alpha, \vec{n} \perp \alpha$

Рассмотрим $\forall M(x, y, z) \in \alpha, \overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, т.е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Это – <u>**общее уравнение плоскости**</u>

Полное и неполное уравнения плоскости

<u>Опр.</u> Уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ называется **<u>полным</u>**, если все коэффициенты $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$

Уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ называется **<u>неполным</u>**, если хотя бы один из этих коэффициентов равен 0.

Полное уравнение задает плоскость, не проходящую через начало координат и не параллельную ни одной из координатных осей.

Плоскости, задаваемые неполными уравнениями

- $D = 0$

Плоскость проходит через начало координат

- $D \neq 0$ и ровно один из коэффициентов A, B или C равен 0

Плоскость параллельна соответствующей оси координат
(Ox, Oy или Oz соответственно)

- $D \neq 0$ и ровно два коэффициента среди A, B или C равны 0

Плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости
(при $A \neq 0 \quad Oyz$, при $B \ \neq 0 \quad Oxz$, при $C \neq 0 \quad Oxy$)

- $D = 0$ и только один из коэффициентов A, B или C не равен 0

Плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью
(при $A \neq 0 \quad Oyz$, при $B \ \neq 0 \quad Oxz$, при $C \neq 0 \quad Oxy$)

Уравнение плоскости в отрезках

Плоскость α: $Ax + By + Cz + D = 0$ (полное уравнение)

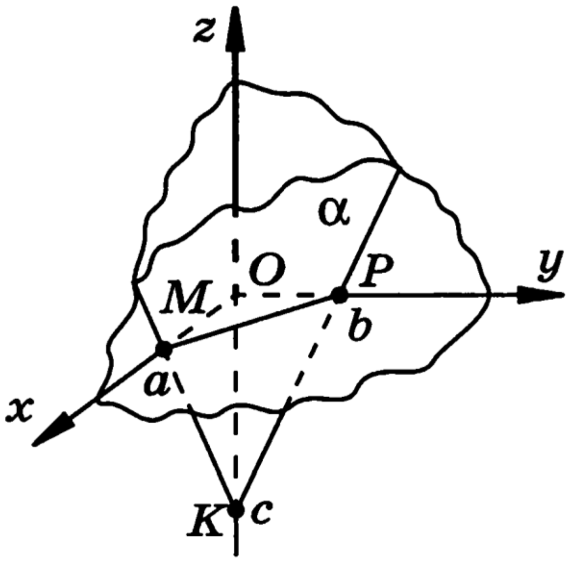
Перепишем: $-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$\alpha \cap Ox = (a, 0,0)$

$\alpha \cap Oy = (0, b, 0)$

$\alpha \cap Oz = (0,0, c)$



$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$ - уравнение плоскости в отрезках

Уравнение плоскости по трем точкам

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$

Составляем систему:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$$

Решаем ее и находим A, B, C, D с точностью до коэффициента пропорциональности.

Плоскость α: $Ax + By + Cz + D = 0$

Общее уравнение плоскости. Продолжение

Теорема. Каждое уравнение первой степени вида $Ax + By + Cz + D = 0$ при условии $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ задает в прямоугольной системе координат $Oxyz$ единственную плоскость, для которой вектор $\vec{n}(A, B, C)$ является вектором нормали.

Следствия.

$$\forall\, \vec{p}(p_1, p_2, p_3) \parallel \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad p_1 \cdot A + p_2 \cdot B + p_3 \cdot C = 0$$

$$\forall \overrightarrow{m} \perp \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists \lambda \neq 0: \quad \overrightarrow{m}(\lambda A, \lambda B, \lambda C)$$

Замечание. Уравнение плоскости по трем точкам

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$$

Решаем ее и находим A, B, C, D с точностью до коэффициента пропорциональности. Плоскость α: $\; Ax + By + Cz + D = 0$

Т.е. если $M(x; y; z) \in \alpha$, то компланарны векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$, т.е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Пример. Уравнение плоскости по трем точкам

$M_1(2;0;0)$, $M_2(0;2;0)$, $M_3(0;0;2)$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$4(x-2)-(-4)z-(-4)y=0$$

$$4x+4y+4z-8=0$$

$$x+y+z-2=0$$

Взаимное расположение плоскостей

α: $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ $\qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

β: $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ $\qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\boxed{\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}}$$

Это – <u>условие параллельности плоскостей</u>.

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости α и β <u>совпадают</u>.

В остальных случаях плоскости <u>пересекаются</u>.

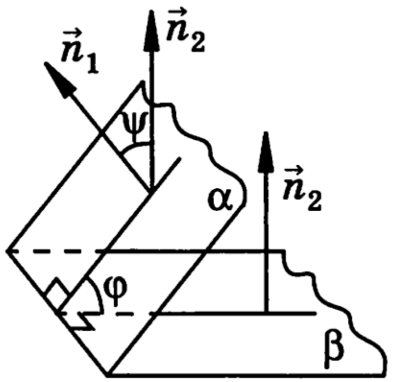
Угол между плоскостями

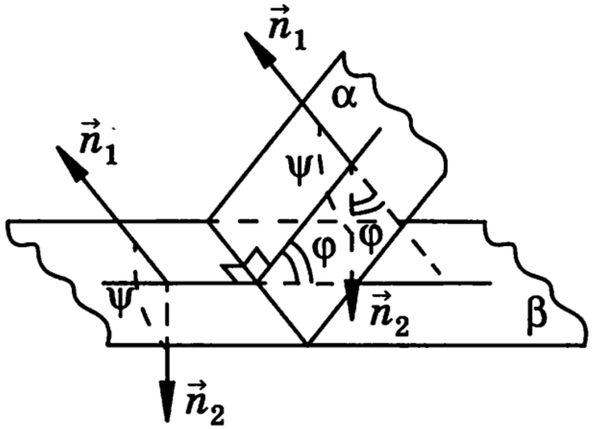
α: $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ $\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

β: $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ $\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$\angle(\alpha, \beta) \in [0°; 90°]$

$$\boxed{\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = \left|\cos(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}})\right| = \frac{|A_1\,A_2 + B_1\,B_2 + C_1\,C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$





Условие перпендикулярности плоскостей

α: $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ $\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

β: $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ $\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\boxed{\cos\left(\widehat{\alpha, \beta}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right)\right| = \frac{|A_1\,A_2 + \ B_1\,B_2 + \ C_1\,C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

$$\boxed{\alpha \perp \beta \quad \Leftrightarrow \quad A_1\,A_2 + \ B_1\,B_2 + \ C_1\,C_2 = 0}$$

Это – <u>условие перпендикулярности плоскостей</u>.

Параметрическое уравнение прямой в векторной форме

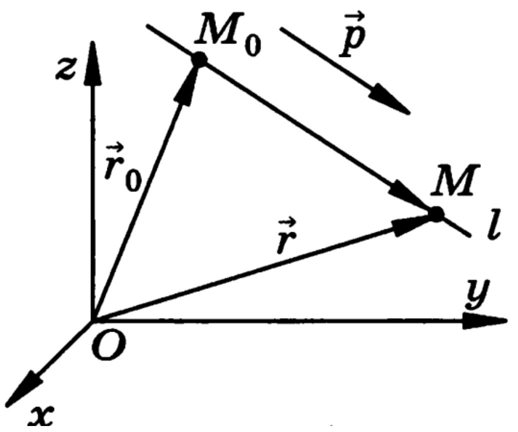
<u>Дано</u>: точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\vec{p}(a, b, c) \neq \vec{0}$ (т.е. $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

<u>Прямая</u> l: $M_0 \in l, \vec{p} \parallel l$

Рассмотрим $\forall M(x, y, z) \in l$

$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$

$\boxed{\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$



Это – <u>параметрическое уравнение прямой в векторной форме</u>.

Параметрические уравнения прямой в координатной форме

Дано: точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\vec{p}(a, b, c) \neq \vec{0}$

$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Прямая l: $M_0 \in l, \vec{p} \parallel l$

$\forall M(x, y, z) \in l, \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}\,, \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p}\,, \forall\lambda \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}} \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Это – параметрические уравнения прямой в координатной форме.

Канонические уравнения прямой в координатной форме

<u>Дано</u>: точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\vec{p}(a, b, c) \neq \vec{0}$
$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. <u>Прямая</u> l: $M_0 \in l, \vec{p} \parallel l$.

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

Это – <u>канонические уравнения прямой в координатной форме</u>.

Канонические уравнения прямой в координатной форме. Замечание

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$

В этой формуле в знаменателе может быть записан 0 (в одном или двух знаменателях) – это формальная запись, означающая параллельность соответствующей оси координат.

Например, $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ - уравнение координатной оси Oz.

Уравнения прямой по двум точкам в канонической форме

$M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_0 \in l, M_1 \in l$

$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{p} \parallel l$

$a = x_1 - x_0,\ b = y_1 - y_0,\ c = z_1 - z_0$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}}$$

Уравнения прямой по двум точкам в координатной форме

$M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_0 \in l, M_1 \in l, \overrightarrow{M_0M_1} = \vec{p} \parallel l$

$$\lambda = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases}} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Прямая как линия пересечения двух плоскостей

α: $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ $\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

β: $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ $\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\alpha \cap \beta = l$$

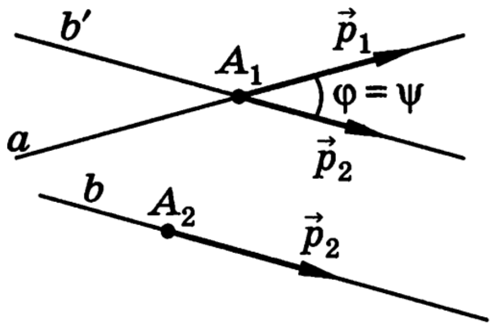
$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

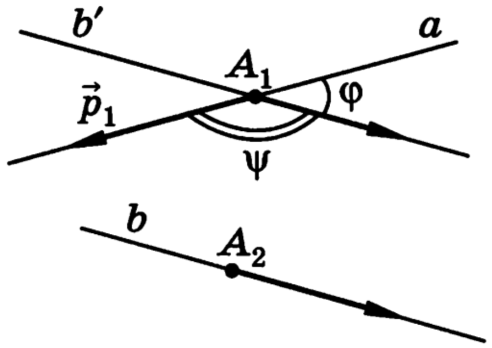
Прямая задана системой двух общих уравнений первого порядка с тремя переменными

Угол между прямыми

<u>Дано</u>: прямая l_1: направляющий вектор $\overrightarrow{p_1}(a_1, b_1, c_1)$ и прямая l_2: направляющий вектор $\overrightarrow{p_2}(a_2, b_2, c_2)$

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda a_1 \\ y = y_1 + \lambda b_1 \\ z = z_1 + \lambda c_1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = x_2 + \lambda a_2 \\ y = y_2 + \lambda b_2 \\ z = z_2 + \lambda c_2 \end{cases}$$





$\varphi = \angle(l_1; l_2) \in [0°; 90°]$, $\psi = \angle(\overrightarrow{p_1}; \overrightarrow{p_2}) \in [0°; 180°]$, $\cos\varphi = |\cos\psi|$

$$\boxed{\cos\angle(l_1; l_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{p_1}; \overrightarrow{p_2})| = \frac{|a_1\, a_2 + b_1\, b_2 + c_1\, c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}}$$

Взаимное расположение прямых

Дано: прямая l_1: направляющий вектор $\overrightarrow{p_1}(a_1, b_1, c_1)$ и прямая l_2: направляющий вектор $\overrightarrow{p_2}(a_2, b_2, c_2)$

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda a_1 \\ y = y_1 + \lambda b_1 \\ z = z_1 + \lambda c_1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = x_2 + \lambda a_2 \\ y = y_2 + \lambda b_2 \\ z = z_2 + \lambda c_2 \end{cases}$$

Условие параллельности прямых:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1}(a_1, b_1, c_1) \parallel \overrightarrow{p_2}(a_2, b_2, c_2) \qquad \boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

Условие перпендикулярности прямых:

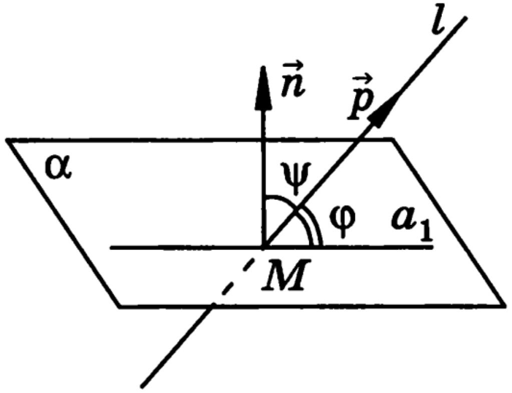
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1}(a_1, b_1, c_1) \perp \overrightarrow{p_2}(a_2, b_2, c_2) \qquad \boxed{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0}$$

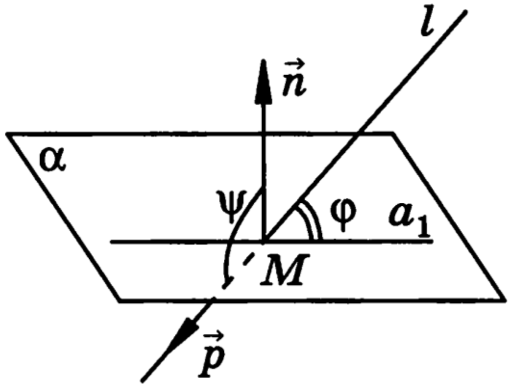
Угол между прямой и плоскостью

Дано: плоскость α: $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор нормали $\vec{n}(A, B, C)$

прямая l: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b, \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$

направляющий вектор $\vec{p}(a, b, c)$





$\varphi = \angle(l; \alpha) \in [0°; 90°]$, $\psi = \angle(\vec{p}; \vec{n}) \in [0°; 180°]$, $\boldsymbol{\sin\varphi} = |\cos\psi|$

$$\boxed{\sin\angle(l;\alpha) = |\cos\angle(\vec{p};\vec{n})| = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости

Дано: плоскость α: $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор нормали $\vec{n}(A, B, C)$

прямая l: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$ направляющий вектор $\vec{p}(a, b, c)$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$l \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{p} \qquad \boxed{Aa + Bb + Cc = 0}$$

Иначе прямая и плоскость пересекаются. В частности:

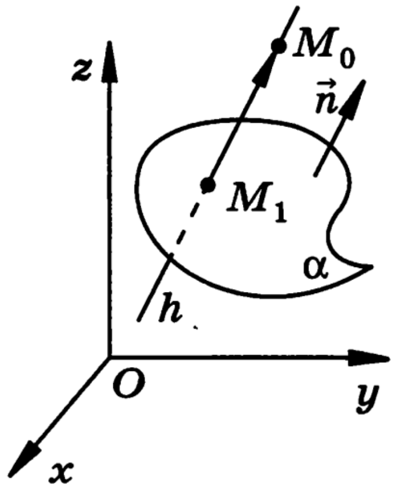
Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{p} \qquad \boxed{\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}}$$

Расстояние от точки до плоскости в координатах -1

<u>Дано</u>: плоскость α: $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор нормали $\vec{n}(A, B, C)$

точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$



Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$ и $M_0M_1 \perp \alpha$

$d(M_0; \alpha) = |M_0M_1|$

Прямая $M_0M_1 = h$:

направляющий вектор $\vec{n}(A, B, C)$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda A \\ y = y_0 + \lambda B \\ z = z_0 + \lambda C \end{cases}$$

Расстояние от точки до плоскости в координатах -2

Тогда координаты точки $M_1 = h \cap \alpha$ – это решение системы:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda A \\ y = y_0 + \lambda B \\ z = z_0 + \lambda C \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$, т.е. $\lambda_1 = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}$ и $\begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda_1 A \\ y_1 = y_0 + \lambda_1 B \\ z_1 = z_0 + \lambda_1 C \end{cases}$

$$d(M_0; \alpha) = |M_0 M_1| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} =$$

$$= \sqrt{(\lambda_1 A)^2 + (\lambda_1 B)^2 + (\lambda_1 C)^2} = |\lambda_1| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\boxed{d(M_0; \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Расстояние от точки до плоскости в координатах -3
II способ вывода формулы

$\overrightarrow{M_1M_0}(x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1) \parallel \vec{n}(A, B, C)$

$\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n} = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cdot |\vec{n}| \cdot (\pm 1)$

$$d(M_0; \alpha) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \ \vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C|}{|\vec{n}|}$$

т.к. $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$, то $\quad -x_1A - y_1B - z_1C = D$

$$\boxed{d(M_0; \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Напоминание: расстояние от точки до прямой

Дано:

прямая l: $Ax + By + C = 0$, вектор нормали $\vec{n}(A, B)$

точка $M_0(x_0, y_0)$

$$\boxed{d(M_0; l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Задача 1

Дано: параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$

$A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;2;0), A_1(0;0;3)$

Найти расстояние от плоскости A_1DB до точки C_1

Решение: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{(1;0;0)} \Rightarrow C(1;2;0)$

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{(0;0;3)} \Rightarrow C_1(1;2;3)$

$$A_1DB: \begin{cases} 3C + D = 0 \\ 2B + D = 0 \\ A + D = 0 \end{cases} \Rightarrow D = -6, A = 6, B = 3, C = 2 \Rightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

$$d(C_1; A_1DB) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

Задача 2

Дано: тетраэдр $ABCD$: $A(0;0;4), B(0;4;0), C(4;0;0), D\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$

Найти

a) угол между плоскостью ABC и прямой CD

b) расстояние от плоскости ABC до точки D

Решение: ABC: $\begin{cases} 4C+D=0 \\ 4B+D=0 \\ 4A+D=0 \end{cases} \Rightarrow D=-4, \quad A=B=C=1$

$\Rightarrow x+y+z-4=0 \quad \vec{n}(1;1;1)$

$\overrightarrow{DC}\left(\frac{16}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)=\vec{p}$ и CD: $\frac{x-4}{\frac{16}{3}}=\frac{y}{\frac{4}{3}}=\frac{z}{\frac{4}{3}}$

Задача 2 (продолжение)

$$\sin\angle(CD;ABC) = |\cos\angle(\vec{p};\vec{n})| = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{\left|1\cdot\frac{16}{3}+1\cdot\frac{4}{3}+1\cdot\frac{4}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

<u>Ответ</u>: $\angle(CD;ABC) = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$d(D;ABC) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{\left|1\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+1\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+1\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-4\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Алгоритм:

1. ввести систему координат
2. найти плоскость $\alpha: l_1 \subset \alpha, l_2 \parallel \alpha$
3. составить уравнение этой плоскости α вида $Ax + By + Cz + D = 0$
4. выбрать произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l_2$
5. вычислить искомое расстояние по формуле

$$d(M_0; \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми. Задача 3.

Дано: прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которой служит квадрат $ABCD$ со стороной 4. Высота призмы $2\sqrt{2}$.

Найти расстояние между прямыми A_1D и CD_1.

Решение: введем систему координат:

$CD_1 \parallel A_1BD \Rightarrow d(A_1D; CD_1) = d(D_1; A_1BD)$

$A_1BD: x - y - \sqrt{2}z = 0$

$$d(D_1; A_1BD) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{\left|1 \cdot 4 + (-1) \cdot 4 + \left(-\sqrt{2}\right) \cdot 2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2}} = 2$$