Решение систем линейных уравнений

Матрицы и определители

Решение систем линейных уравнений - 1

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}y = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x + \dfrac{a_{22}}{a_{21}}y = \dfrac{b_2}{a_{21}} \end{cases}$$

$$\frac{a_{22}}{a_{21}}y - \frac{a_{12}}{a_{11}}y = \frac{b_2}{a_{21}} - \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$y = \frac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Решение систем линейных уравнений - 2

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}}$$

Опр. Матрица 2×2 – это таблица вида $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

a_{ij} - элемент матрицы, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} \end{pmatrix}$ - главная диагональ

$\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$ - второстепенная диагональ

Такую матрицу называют матрицей системы

Решение систем линейных уравнений - 3

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}}$$

Опр. Определитель (детерминант) второго порядка – это выражение вида

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$ - определитель матрицы системы

$$\boxed{\Delta_x = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b_1} & a_{12} \\ \boldsymbol{b_2} & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}}$$

$$\boxed{\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{b_1} \\ a_{21} & \boldsymbol{b_2} \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1}$$

Обозначение: $\Delta(A) = \|A\| = |A| = det(A)$

Решение систем линейных уравнений – 4
Формулы Крамера

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \boldsymbol{b_1} \\ a_{21}x + a_{22}y = \boldsymbol{b_2} \end{cases}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b_1} & a_{12} \\ \boldsymbol{b_2} & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{b_1} \\ a_{21} & \boldsymbol{b_2} \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}; \qquad y = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}}$$

Решение систем линейных уравнений - 5

Пример. $\begin{cases} 7x - 6y = 5 \\ 8x - 7y = -10 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \quad A_x = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \|A\| = -1$$
$$\Delta_x = \|A_x\| = -95$$
$$\Delta_y = \|A_y\| = -110$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 95$$
$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 110$$

Ответ: $(95; 110)$

Решение систем линейных уравнений - 7

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}}$$

Опр. Определитель (детерминант) третьего порядка – это выражение вида

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}}$$

Здесь это – определитель (главный определитель) матрицы системы.

$$\boxed{\Delta_x = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b_1} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{b_2} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{b_3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{b_1} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{b_2} & a_{23} \\ a_{31} & \boldsymbol{b_3} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boldsymbol{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{b_2} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{b_3} \end{vmatrix}}$$

Правила раскрытия определителя - 1

I способ (метод «звезды»)

Помним: первые и вторые индексы в группах не должны повторяться!

$$\Delta= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$+$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 0 - 1 - 2 - 0 = 2$$

Правила раскрытия определителя -2

II способ (метод «забора» - правило Саррюса)

Помним: первые и вторые индексы в группах не должны повторяться!

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\Bigg|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\Bigg| = 0 + 1 + 2 - 0 - 1 - 1 = 1$$

Правила раскрытия определителя - 3

III способ (метод «разложения по строке»)

Помним: первые и вторые индексы в группах не должны повторяться!

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum (-1)^{i+j} a_{ij} \| D_{ij} \| =$$

$$(-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

D_{ij} - алгебраическое дополнение элемента (дополнительный минор) a_{ij}