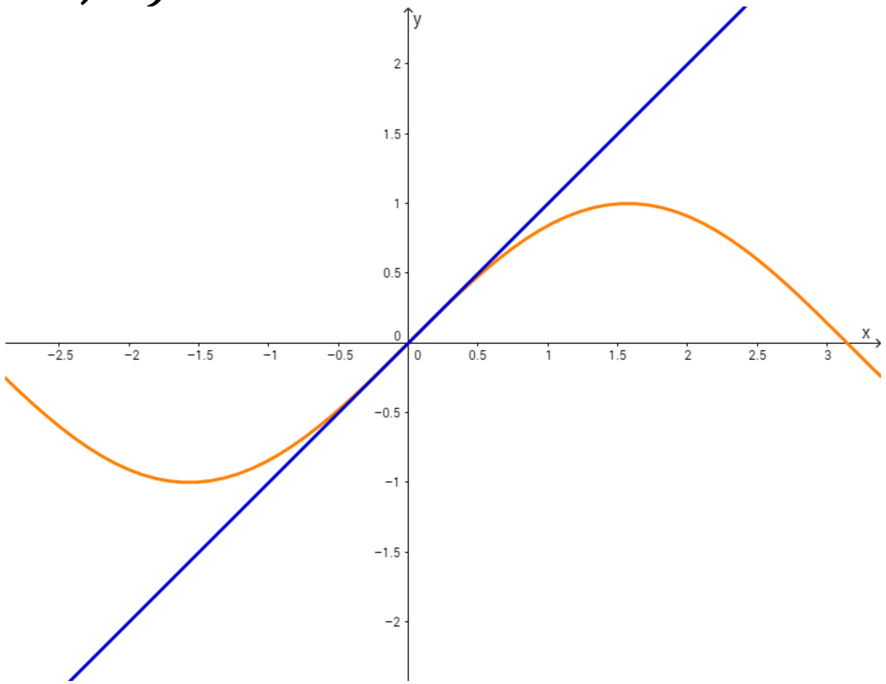
Применение производной

Применение производной

- Исследование функций
- Решение уравнений
- Решение неравенств
- Приближенные вычисления
- Задачи на геометрический смысл производной (касательная и нормаль)
- Задачи на физический смысл производной
- Задачи нахождения наибольшего или наименьшего значения на промежутке
- Задачи оптимизации (ЕГЭ №17)

Напоминание. Применение производной для доказательства неравенств -1

$\boxed{\sin x \le x}$ при $x \in (0; +\infty)$ и $\boxed{\sin x \ge x}$ при $x \in (-\infty; 0)$



Доказательство: $f(x) = x - \sin x$

$f'(x) = 1 - \cos x \ge 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$

По обратной теореме $f(x) \nearrow$ при $x \in (0; +\infty)$.

При $x = 0$ $f(0) = 0$

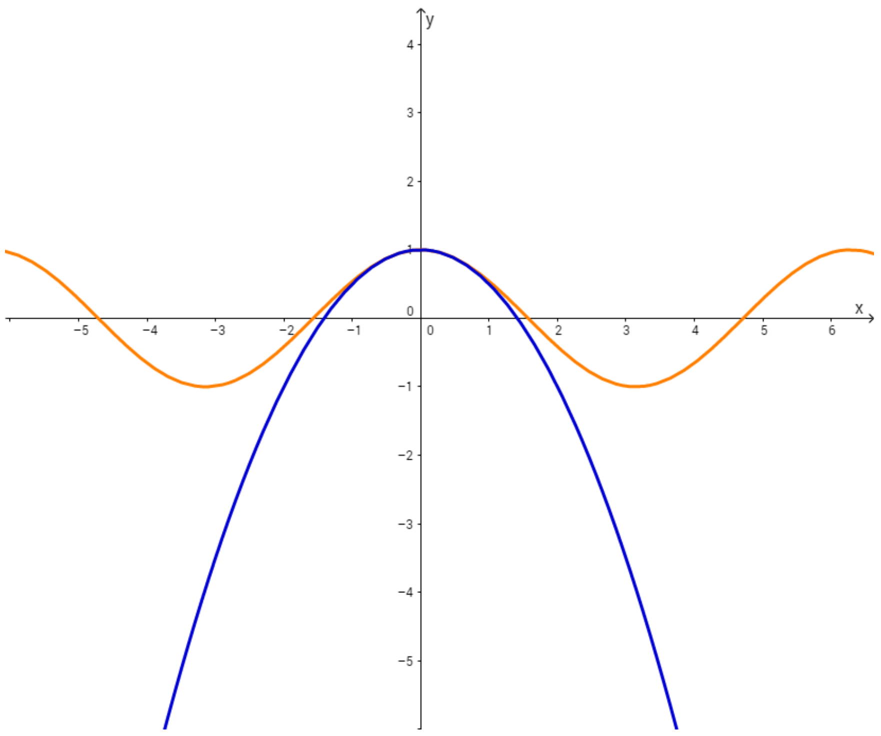
$f(x) = x - \sin x \ge f(0) = 0$ при $\forall x \in (0; +\infty)$

т.е. $\sin x \le x$ при $x \in (0; +\infty)$

Второе неравенство доказывается аналогично.

Напоминание. Применение производной для доказательства неравенств -2

$\boxed{\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}}$ при $\forall x \in \mathbb{R}$



Доказательство: в силу чётности достаточно рассмотреть $\forall x \in (0; +\infty)$.

$f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, $f'(x) = -\sin x + x \geq 0$

при $\forall x \in (0; +\infty)$

По обратной теореме $f(x) \nearrow$.

При $x = 0$ $f(0) = 0$

$f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \geq f(0) = 0$ при $\forall x \in (0; +\infty)$

т.е. $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ при $x \in (0; +\infty)$

Напоминание. Применение производной для доказательства неравенств -3

$\boxed{\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}}$ при $x \in (0; +\infty)$ $\boxed{\sin x \leq x - \frac{x^3}{6}}$ при $x \in (-\infty; 0)$

<u>Доказательство</u>: рассмотрим $\forall x \in (0; +\infty)$.

$$f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$$

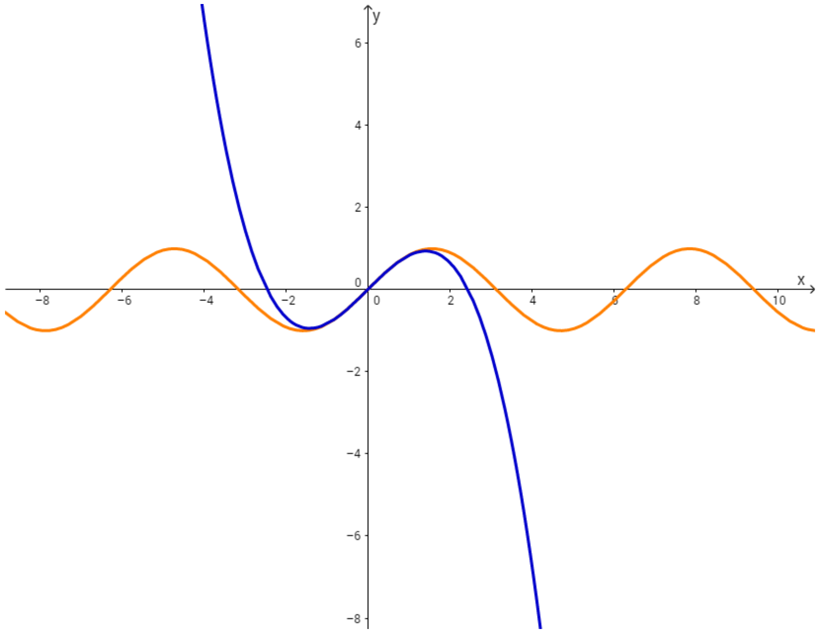
$$f'(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \geq 0$$ при $\forall x \in (0; +\infty)$

По обратной теореме $f(x) \nearrow$ при $\forall x \in (0; +\infty)$.

При $x = 0$ $f(0) = 0$

$$f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \geq f(0) = 0$$ при $\forall x \in (0; +\infty)$

т.е. $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ при $x \in (0; +\infty)$



Напоминание. Приближенные вычисления. Дифференциал -1

Рассмотрим функцию $f(x) = 3x^2 + 2$ и точку $x = 2$

Производная: $f'(x) = 6x$

Дифференциал: $\mathrm{d}\, f(2) = f'(2) \cdot \Delta x = 12\Delta x$

Приращение функции:

$\Delta f = f(2 + \Delta x) - f(2) = 3(2 + \Delta x)^2 + 2 - (3 \cdot 2^2 + 2) = 12\Delta x + 3(\Delta x)^2$

Погрешность: $3(\Delta x)^2$

При $\Delta x = 0{,}1 \quad 3(\Delta x)^2 = 0{,}03$

При $\Delta x = 0{,}01 \quad 3(\Delta x)^2 = 0{,}0003$

При $\Delta x = 0{,}001 \quad 3(\Delta x)^2 = 0{,}000003$

Напоминание. Приближенные вычисления. Дифференциал -2

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и точки $x = 64$ и $x_0 = 65$

Производная: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Дифференциал: $\mathrm{d}\,f(64) = f'(64) \cdot \Delta x = \frac{1}{16}\Delta x$

Приращение аргумента: $\Delta x = 1$

Приращение функции: $\Delta f \approx \mathrm{d}\,f(64)$

$f(65) \approx f(64) + \mathrm{d}\,f(64) = 8 + \frac{1}{16} = 8{,}0625$

Сравним: $\sqrt{65} = 8{,}062257748\ldots$

Решение уравнений с использованием производной. Пример 1

Решить уравнение $2x + \cos x = \pi$

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x + \cos x$

$D(f) = \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R}), f \in D(\mathbb{R})$

$f'(x) = 2 - \sin x > 0$ при $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}$

Значит, $f(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}$

Можно заметить, что $x = \frac{\pi}{2}$ является корнем уравнения $2x + \cos x = \pi$, действительно: $2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \pi$

В силу монотонности и непрерывности функции $f(x)$ других корней это уравнение не имеет.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}$

Решение уравнений с использованием производной. Пример 2

Решить уравнение $2\sin\frac{\pi x}{2} - 2\cos\pi x = x^3 + 10x - 30$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 10x - 30 - 2\sin\frac{\pi x}{2} + 2\cos\pi x.$

$D(f) = \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R}), f \in D(\mathbb{R})$. Найдем и оценим производную этой функции:

$f'(x) = 3x^2 + 10 - \pi\cos\frac{\pi x}{2} - 2\pi\sin\pi x > 3x^2 + 10 - 3\pi > 0$ при $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Значит, $f(x) \uparrow$ на $D(f) = \mathbb{R}$.

Можно заметить, что $x = 2$ является корнем уравнения $f(x) = 0$, действительно:

$f(2) = 2^3 + 10 \cdot 2 - 30 - 2\sin\frac{\pi \cdot 2}{2} + 2\cos 2\pi = 0$

В силу монотонности и непрерывности функции $f(x)$ других корней этого уравнение не имеет.

Ответ: $x = 2$

Решение уравнений с использованием производной. Пример 2

Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$

Рассмотрим функции $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ и $g(x)=x^2-4x+6$

$$g(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2\geq 2$$

$D(g)=\mathbb{R}$, $g\in C(\mathbb{R})$, $g\in D(\mathbb{R})$, $E(g)=[2;+\infty)$

$D(f)=[1;3]$, $f\in C([1;3])$, $f\in D\big((1;3)\big)$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$ $f'(x)=0$ при $x=2$ (стационарная точка)

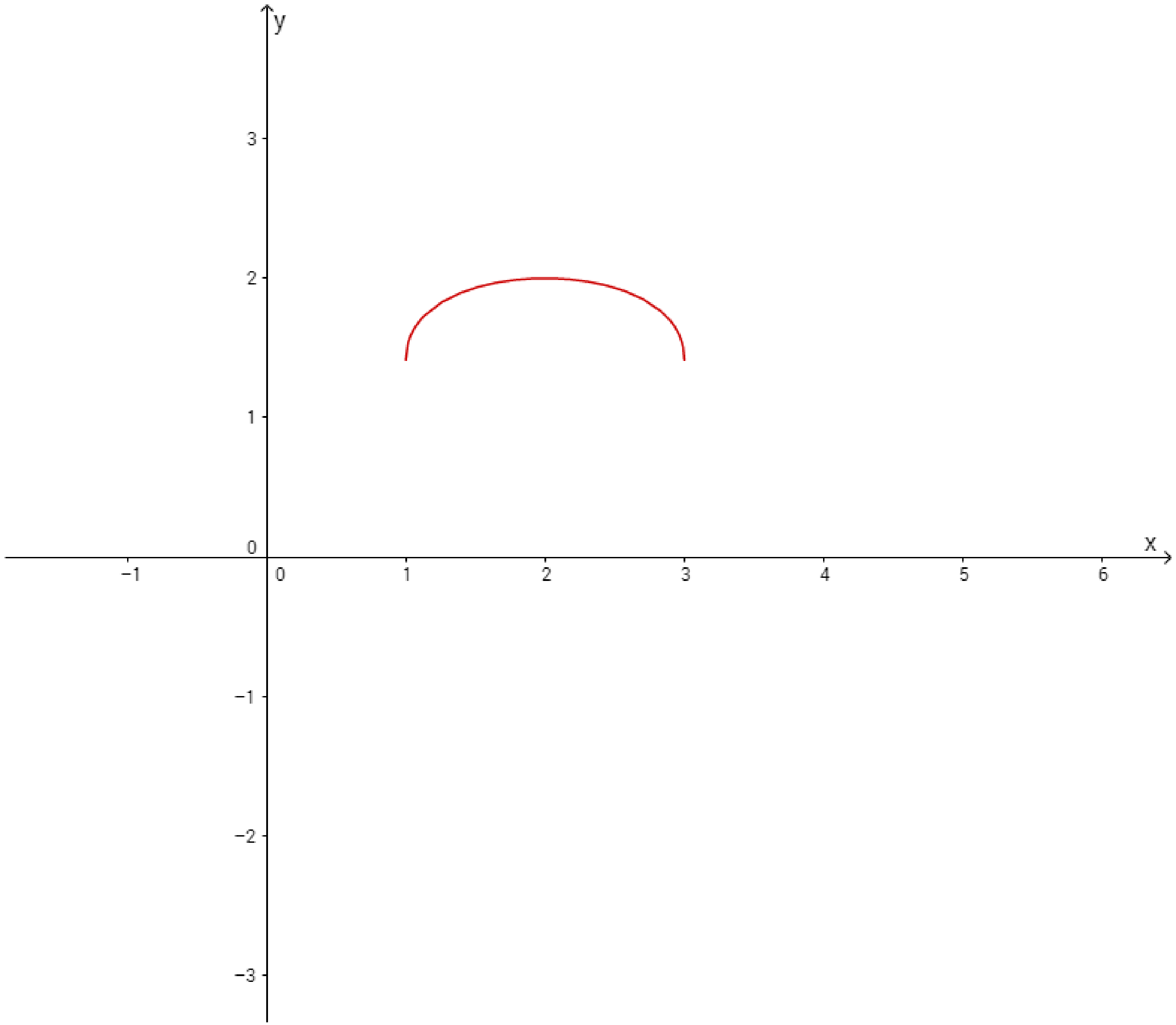
Рассмотрим значения $f(x)$ на концах отрезка и в стационарной точке: $f(1)=f(3)=\sqrt{2}$ и $f(2)=2$

Значит, $E(f)=\left[\sqrt{2};2\right]$

Следовательно, уравнение примет вид $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6=2$. Это верно при $x=2$

Ответ: $x=2$

График функции $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$



Задачи на оптимизацию. Алгоритм исследования

1. Составление математической модели

   Определить независимую переменную (независимые переменные)

   Определить границы изменения (ОДЗ)

   Выразить оптимизируемую величину как функцию от независимых переменных

2. Работа с математической моделью

   Исследование функции с помощью производной (найти экстремумы, минимальное и максимальное значение на отрезке)

3. Ответ на вопрос задачи

   Сформулировать ответ согласно полученным выше данным

Замечания:

Стационарная точка не сдвигается при преобразованиях вида:

- $f(x) \pm a$, где $a = const, \forall a \in \mathbb{R}$
- $a \cdot f(x)$, где $a = const, \forall a \in \mathbb{R}$ (при $a < 0$ минимум и максимум «меняются местами»)
- $\left(f(x)\right)^n, n \in \mathbb{N}, f(x) > 0$

Например: $f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{49 - x^2} + 8$ на $[0; 7]$ имеет экстремум там же, где и $g(x) = x^2(49 - x^2)$

$(-8; * 3; \uparrow 2)$

Вообще говоря, при $f(x) > 0$ функция $f(x)$ имеет экстремумы там же, где и функции $-f(x)$ и $\frac{1}{f(x)}$ (при этом минимум и максимум «меняются местами»)

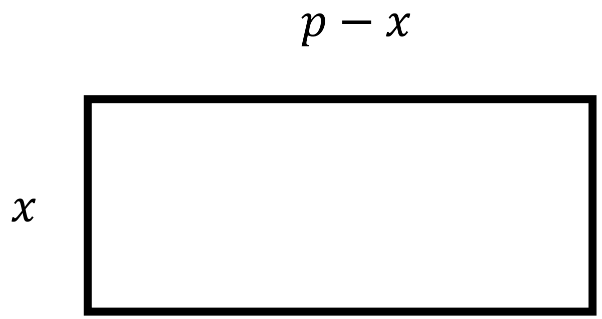
Например: $f(x) = (x-2)^2 + 5$ и

$g(x) = \frac{1}{(x-2)^2+5}$ и $w(x) = -(x-2)^2 - 5$

Пример 1

Какова наибольшая площадь прямоугольного участка земли, который можно огородить куском проволоки, имеющим длину $2p$?

I. $S(x) = x(p - x) \to \max$ на $(0; p)$



II. $S'(x) = p - 2x = 0$

$x_0 = \frac{p}{2}$

$S_{max} = S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$

III. Ответ: $S = \frac{p^2}{4}$

Пример 2

Дан квадратный лист жести со стороной 1. В четырех углах квадрата вырезают маленькие квадраты, после чего загибают боковые стороны и составляют коробку. При какой длине стороны маленьких квадратов объем получившейся коробки будет наибольшим?

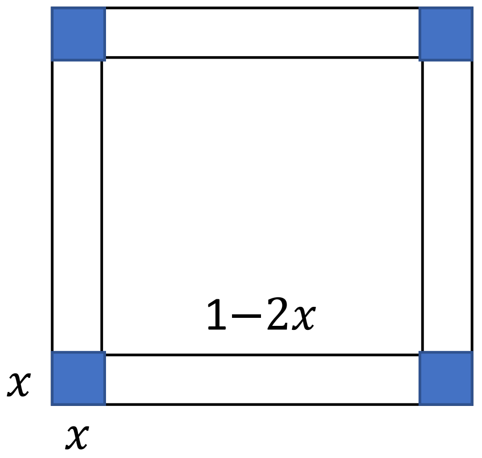
I. $V(x) = (1-2x)^2 \cdot x \to \max$ на $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

II. $V'(x) = (1-2x)(1-6x) = 0$

$x_0 = \frac{1}{6}$

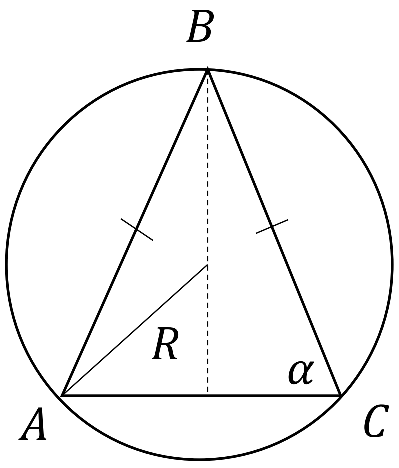
$V_{max} = V(x_0) = \frac{2}{27}$

III. Ответ: $x_0 = \frac{1}{6}$



Пример 3

Среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в заданный круг, найти треугольник с наибольшим периметром.



I. $\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(\pi-2\alpha)} = 2R$

$AB = BC = 2R\sin\alpha\,,\ AC = 2R\sin 2\alpha$

I. $P(\alpha) = 2R(2\sin\alpha + \sin 2\alpha) \rightarrow \max$ на α ∈ $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

II. $P'(\alpha) = 4R\cos\alpha + 4R\cos 2\alpha =$

$= 4R(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1) = 4R(2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1)$

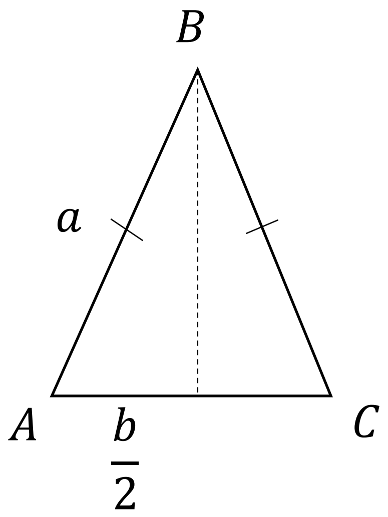
При α ∈ $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$, $P_{max} = P(\alpha_0)$

III. Ответ: равносторонний треугольник

Пример 4

Из всех равнобедренных треугольников площади 1 найти тот, у которого периметр наименьший.

I. $S = \frac{1}{2}hb = 1 \Longrightarrow h = \frac{2}{b}$



$$a = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^4+16}}{2b}$$

$$P(b) = b + 2a = b + \frac{\sqrt{b^4+16}}{b} \to \min \text{ на } b \in (0; +\infty\,)$$

II. $P'(b) = 1 + \frac{b^4-16}{b^2\sqrt{b^4+16}} = 0$

$$16 - b^4 = b^2\sqrt{b^4+16}, \quad b^4 \in [0; 16]$$

$b_0^4 = \frac{16}{3}$, $\quad b_0 = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$, $\quad P_{min} = P(b_0)$, при этом $a_0 = \sqrt{\left(\frac{b_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{b_0}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = b_0$

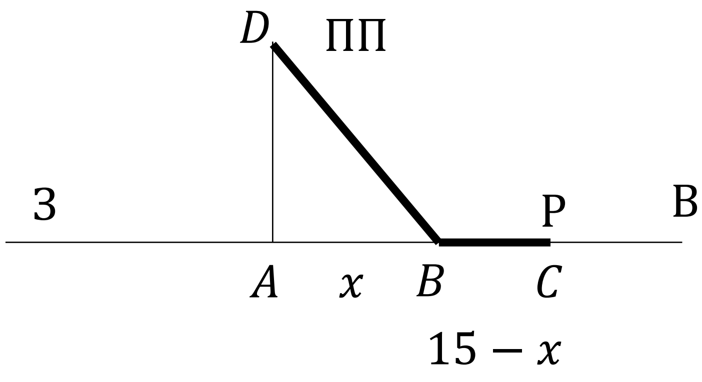
III. Ответ: равносторонний треугольник

Пример 5

В степи на расстоянии 9 км к северу от шоссе, идущего с запада на восток, находится поисковая партия. В 15 км к востоку от ближайшей на шоссе точки к поисковой партии расположен райцентр. Поисковая партия отправляет курьера-велосипедиста в райцентр. Какой должен быть маршрут следования курьера, чтобы он прибыл в райцентр в кратчайший срок, если известно, что по степи он едет со скоростью 8 км/ч, а по шоссе – со скоростью 10 км/ч.

I. $t(x) = \frac{DB}{8} + \frac{BC}{10} = \frac{\sqrt{81+x^2}}{8} + \frac{15-x}{10} \to \min$ на $x \in [0; 15]$

II. $t'(x) = \frac{x}{8\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{10} = 0$



$5x = 4\sqrt{81 + x^2}, \quad x \in [0; 15]$

$x_0 = 12 \qquad t_{min} = t(x_0)$

III. Ответ: нужно въехать на шоссе на расстоянии 3 км от райцентра

Пример 6

На графике функции $f(x) = \sqrt{x}$ найти точку, ближайшую к точке $M(3; 6)$.

I. $\quad d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{x}-6)^2} =$

$= \sqrt{x^2 - 5x - 12\sqrt{x} + 45} \to \min$ на $x \in [0; +\infty)$

$t = \sqrt{x}$

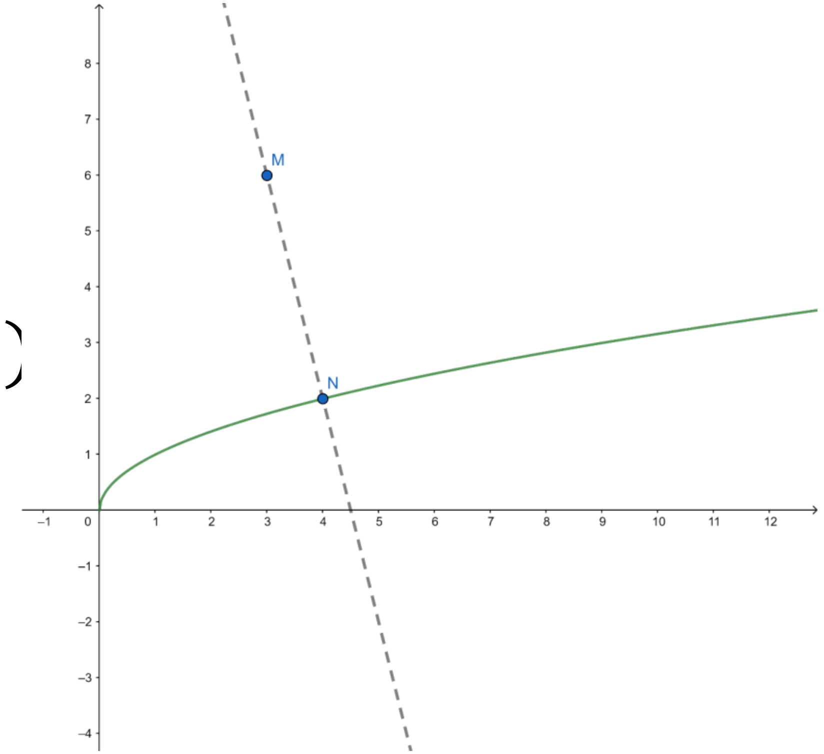
$d^2(t) = t^4 - 5t^2 - 12t + 45 \to \min$ на $t \in [0; +\infty)$

II. $\quad \left(d^2(t)\right)' = 4t^3 - 10t - 12 =$

$= 2(t-2)(2t^2 + 4t + 3) = 0$

$t_0 = 2 \qquad d_{min} = d(t_0) \qquad x_0 = 4 \quad y_0 = 2$

Ответ: $(4; 2)$



Задачи ЕГЭ на оптимизацию. № 17

Бизнесмен является владельцем двух заводов, выпускающих одинаковую продукцию в разных городах. На втором заводе используются более современное оборудование, позволяющее за одинаковое время с первым заводом производить больше продукции, чем на первом заводе. Известно, что если рабочие с первого завода трудятся суммарно $3t^2$ часов в неделю, то за это время они производят t единиц товара. А если рабочие второго завода трудятся суммарно $4t^2$ часов в неделю, то за это время они производят t единиц товара. На обоих заводах за каждый час работы рабочему платят 1000 руб. За неделю необходимо выпустить суммарно на обоих заводах 30 единиц продукции. Какую наименьшую сумму придется потратить за неделю на оплату труда рабочих?

Задача на оптимизацию без производной. Решение. Построение математической модели

Завод	Время работы, часов	Количество продукции, шт.
I	$3x^2$	x
II	$4y^2$	y

Общее количество продукции (шт.)
$N = x + y = 30$

Пусть зарплата (тыс. руб.) выражается формулой

$$S = 1 \cdot (3x^2 \ + 4y^2\ ) = 3x^2 + 4(30 - x)^2$$

Рассмотрим вспомогательную непрерывную функцию

$S(x) = 3x^2 + 4(30 - x)^2$, определенную на отрезке $[0; 30]$ и дающую целые значения величины S при целых значениях переменной x из указанного отрезка.

Задача на оптимизацию без производной. Решение. Работа с математической моделью

Задача сводится к

$S(x) = 3x^2 + 4(30 - x)^2 \to \min$ при $x \in [0; 30]$

$S(x) = 7x^2 - 240x + 3600$ – квадратичная функция, ветви вверх, минимум в вершине $x_{\text{в}} = \frac{120}{7} = 17\frac{1}{7} \in [0; 30]$

Следовательно, зарплата будет минимальна при $x_0 = 17$ (ближайшее к вершине целое значение абсциссы), тогда

$S_{\min} = 3 \cdot 17^2 + 4 \cdot (13)^2 = 867 + 676 = 1543$ тыс. руб.

Ответ: придётся потратить как минимум 1 543 000 руб.

Пример 7

Бизнесмен является владельцем двух заводов, выпускающих одинаковую продукцию. На втором заводе используются более современное оборудование, позволяющее за одинаковое время с первым заводом производить больше продукции, чем на первом заводе. Известно, что если рабочие с первого завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц товара. А если рабочие второго завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $5t$ единиц товара. На обоих заводах за каждый час работы рабочему платят 500 руб. Какое наибольшее число единиц продукции можно будет выпустить на обоих заводах при условии, что заработную плату на предстоящую неделю можно будет выплатить в размере 1450000 руб?

Пример 7. Построение математической модели

Завод	Время работы в неделю, ч	Продукция, ед.
I	x^2	$2x$
II	y^2	$5y$

Зарплата (руб.) $S = 500 \cdot (x^2 + y^2) = 1450000$, значит

$(x^2 + y^2) = 2900$ и $y = \sqrt{2900 - x^2}$

Общее количество продукции (шт.) выражается формулой

$$N = 2x + 5y = 2x + 5\sqrt{2900 - x^2}$$

Рассмотрим вспомогательную непрерывную функцию

$N(x) = 2x + 5y = 2x + 5\sqrt{2900 - x^2}$, определенную на отрезке $\left[0; \sqrt{2900}\right]$ и дающую целые значения величины N при целых значениях переменной x из указанного отрезка.

Пример 7. Работа с математической моделью

Задача сводится к

$N(x) = 2x + 5y = 2x + 5\sqrt{2900 - x^2} \to \max$ при $x \in [0; \sqrt{2900}]$

$N'(x) = 2 - \frac{5x}{\sqrt{2900 - x^2}}$

$x_0 = 20 \quad y_0 = \sqrt{2900 - 20^2} = 50$

$N_{max} = N(x_0) = 2 \cdot 20 + 5 \cdot 50 = 290$ (ед.)

<u>Ответ</u>: максимум 290 единиц продукции можно произвести.

Пример 8

Первичная информация некоторой фирмы распределяется по двум серверам и обрабатывается на них. С сервера 1 при объёме x^2 Гбайт входящей в него информации выходит $3x$ Гбайт обработанной информации, с сервера 2 при объёме x^2 Гбайт входящей в него информации выходит $4x$ Гбайт обработанной информации. Определить набольший объём выходящей информации, если общий объём входящей информации равен 225 Гбайт.