

## Предел последовательности

**Опр.** Последовательность  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется бесконечно малой (б.м.) последовательностью, если для  $\forall \varepsilon > 0$   $\exists N = N(\varepsilon): \forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon)$  верно  $|z_n| < \varepsilon$ .

**Опр.** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется сходящейся (имеющей конечный предел) последовательностью (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \neq \infty$ ), если для  $\forall \varepsilon > 0$   $\exists N = N(\varepsilon): \forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon)$  верно  $|x_n - A| < \varepsilon$ .

**Теорема.** Произведение б.м. последовательности на ограниченную есть б.м. последовательность.

**Теорема (действия с пределами).** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \neq \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B \neq \infty$ , то

- $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$
- если при этом  $y_n \neq 0$  при  $\forall n \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B \neq 0$ , то  $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  - ограниченная последовательность и  $\exists$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{A}{B}$$

**Теорема Вейерштрасса.** Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

**Теорема о пределе промежуточной последовательности.** Если  $x_n \leq t_n \leq y_n$  при  $\forall n \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \neq \infty$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = A$ .

**Ключевые пределы:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$  для  $\forall k \in \mathbb{N}$ ; если  $|q| < 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ;

если  $a > 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ ; если  $a > 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ;

**Первый замечательный предел:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . **Второй замечательный предел:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ .

**Вычислить пределы последовательностей:**

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n+1}</math></li> <li>2. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 9 - \frac{17}{4n} \right)</math></li> <li>3. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n+2}{n^2+2}</math></li> <li>4. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n-1}{2n^3+3n^2-3}</math></li> <li>5. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n+1}{n^5-5n^2+2}</math></li> <li>6. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^7-n^6+n^4-1}{-3n^7+n+2}</math></li> <li>7. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})</math></li> <li>8. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}}</math></li> <li>9. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{3n + \sqrt[3]{8n^3-1}}</math></li> <li>10. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{n+1}</math></li> <li>11. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[4]{n}(\sqrt[4]{n^3+n} - \sqrt[4]{n^3+n^2}) \right)</math></li> <li>12. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+3n}}{2^n-3^n}</math></li> <li>13. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^{n+1} - 7 \cdot 3^{n+1}}{2^{n+1} - 5 \cdot 3^{n+1} + 6}</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>14. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}</math></li> <li>15. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{1+3+5+\dots+(2n-1)}</math></li> <li>16. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)</math></li> <li>17. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2n \cdot (2n+2)} \right)</math></li> <li>18. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-3n)^3 \sqrt{n+2}}{(4n+5)^3 n^2+n+1}</math></li> <li>19. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi \sqrt{n+2}}{n^2+4n}</math></li> <li>20. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\sin n}{n}</math></li> <li>21. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1+\sin n}{n^2+n+1}</math></li> <li>22. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n</math></li> <li>23. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+2}</math></li> <li>24. <math>x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?</math></li> <li>25. <math>x_n = \frac{1}{2} (x_{n-1} + x_{n-2}), x_1 = a, x_2 = b</math><br/><math>\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?</math></li> </ol> |
|---|--|

**Домашнее задание:**

- |   |   |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}</math></li> <li>2. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+3n)(n^2+n+1)}{5n^3-3n^2+1}</math></li> <li>3. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}</math></li> <li>4. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-2n+5})</math></li> <li>5. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3+4n^2+3}}{n}</math></li> <li>6. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n+1}</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>7. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} + \sqrt{n^3+1}}</math></li> <li>8. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n+1}{2^n+3^n}</math></li> <li>9. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^{n+1} - 2^{n+3}}{6^{n+1}}</math></li> <li>10. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n-1}{(n+1)+(n+2)+\dots+2n}</math></li> <li>11. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n-n})</math></li> </ol> |
|---|---|

**Проверочная работа (предел последовательности). Вариант 1.**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 2}{\sqrt{2n^2 + 3n - 5}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+3} + 3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 - n + 1})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{2n^3 + n^2 + 1})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+2)} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^4 - (n+2)^4}{(n-2)^3 + (n+2)^3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 6n^2 + 12n + 8} - \sqrt{n(n+1)(n+3)}}{\sqrt{n+3}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} - 16n^2}{4n - \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}$

**Проверочная работа (предел последовательности). Вариант 2.**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 1}{6n^3 + n + 2}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 + \left( \frac{2}{5} \right)^n \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - n}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+3)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}$

**Проверочная работа (предел последовательности). Вариант 1.**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 2}{\sqrt{2n^2 + 3n - 5}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+3} + 3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 - n + 1})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{2n^3 + n^2 + 1})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+2)} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^4 - (n+2)^4}{(n-2)^3 + (n+2)^3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 6n^2 + 12n + 8} - \sqrt{n(n+1)(n+3)}}{\sqrt{n+3}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} - 16n^2}{4n - \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}$

**Проверочная работа (предел последовательности). Вариант 2.**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 1}{6n^3 + n + 2}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 + \left( \frac{2}{5} \right)^n \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - n}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+3)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}$

**Проверочная работа (предел последовательности). Вариант 1.**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 2}{\sqrt{2n^2 + 3n - 5}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+3} + 3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 - n + 1})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{2n^3 + n^2 + 1})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+2)} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^4 - (n+2)^4}{(n-2)^3 + (n+2)^3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 6n^2 + 12n + 8} - \sqrt{n(n+1)(n+3)}}{\sqrt{n+3}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} - 16n^2}{4n - \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}$

**Проверочная работа (предел последовательности). Вариант 2.**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 1}{6n^3 + n + 2}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 + \left( \frac{2}{5} \right)^n \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - n}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+3)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}$

