

Предел функции. Непрерывность. Точки разрыва. Асимптоты графика функции.

$$(a + b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + C_n^n \cdot b^n$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^n \cdot x^n$$

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x + a)(x^{2n} - x^{2n-1}a + \dots - xa^{2n-1} + a^{2n})$$

Предел функции на бесконечности.

Понятия бесконечно малой (б.м.), бесконечно большой (б.б.) и сходящейся (имеющей конечный предел на бесконечности) при $x \rightarrow \infty$ функций полностью аналогичны соответствующим понятиям для последовательностей.

Предел функции в точке.

Существует два определения. Они эквивалентны.

Опр. (по Гейне) Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $0 < |x - a| < \delta_0$, тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq \infty$, если для $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $0 < |x_n - a| < \delta$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, верно $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Опр. (по Коши) Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $0 < |x - a| < \delta_0$, тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq \infty$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $0 < |x - a| < \delta$, и верно $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично вводятся понятия **односторонних пределов** $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A_1$ и $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A_2$.

Утв. Функция имеет $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow$ существуют и равны $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A_1 = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A_2 = A$.

Непрерывность функции.

Опр. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если она определена на множестве $|x - a| < \delta_0$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Опр. (по Гейне) Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если для $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, верно $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Опр. (по Коши) Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|x - a| < \delta$, и верно $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Утв. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, то $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке $x = a$ (последнее верно при $g(a) \neq 0$).

Утв. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то $\exists c \in [a; b]$, где $f(c) = 0$.

Утв. Если функция $f(x)$ монотонна и непрерывна в точке $x = a$, то $\exists$ обратная функция $f^{-1}(x)$, она непрерывна в точке $f(a)$ и имеет тот же характер монотонности.

Утв. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Точки разрыва функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x = a$ и не является непрерывной в этой точке, тогда $x = a$ называется точкой разрыва.

- 1 **Устранимый разрыв.** Если $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$. Примеры: $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ в точке $x = 0$ или $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$. Иногда такую функцию (если она не определена в точке разрыва) можно доопределить до непрерывной.
- 2 **Разрыв I рода** (конечный скачок функции). Если $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, т.к. $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$. Примеры: $f(x) = \operatorname{sgn} x$ в точке $x = 0$ или $g(x) = \frac{|x|}{x}$ в точке $x = 0$.
- 3 **Разрыв II рода.** Если $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$), т.к. не существует хотя бы один из $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ (т.е. «бесконечный» скачок, т.е. функция не ограничена). Примеры: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ или $g(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$

Асимптоты графика функции.

Опр. Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$, т.е. их разность бесконечно малая функция.

- 1 Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \neq \infty$, то прямая $y = b$ – **горизонтальная асимптота** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$.
Пример: функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$, ее горизонтальные асимптоты - прямые $y = \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$ и $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$.
- 2 Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, то прямая $y = kx + b$ – **наклонная асимптота** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, где $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b \neq \infty$.
Примеры: функция $g(x) = x + \frac{1}{x}$, ее наклонная асимптота - прямая $y = x$ при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.
 $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$, ее горизонтальные асимптоты прямые $y = x + \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$ и $y = x - \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$.
- 3 Если хотя бы один из коэффициентов k или b получился равным ∞ , то асимптоты не существует.
Пример: функция $f(x) = \sqrt{x}$. Нет наклонной асимптоты, т.к. $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$, но $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$.
- 4 Если $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$ или $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = a$ - **вертикальная асимптота** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$.
Пример: функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$, ее вертикальная асимптота - прямая $x = 0$.