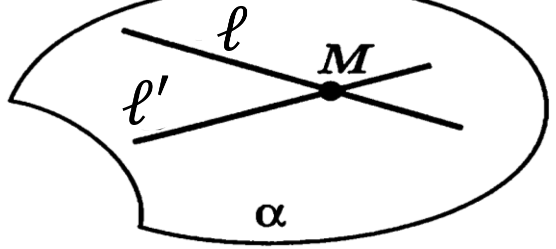
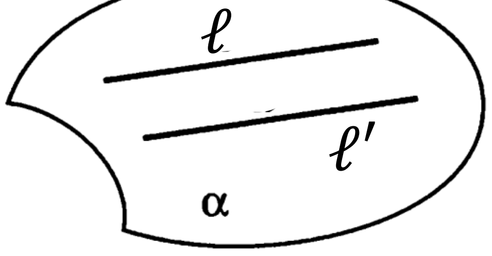
Взаимное расположение прямых в пространстве

Классификация взаимного расположения прямых в пространстве

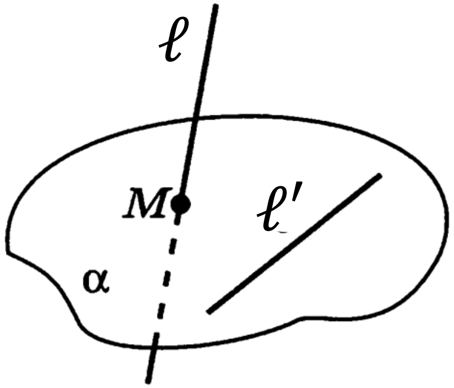
Для взаимного расположения двух прямых в пространстве возможен один и только один из трех случаев:



- Две прямые лежат в одной плоскости и имеют ровно одну общую точку (**пересекающиеся прямые**).
  $\ell \cap \ell' = C, \exists \alpha\colon \ell \subset \alpha, \ell' \subset \alpha$

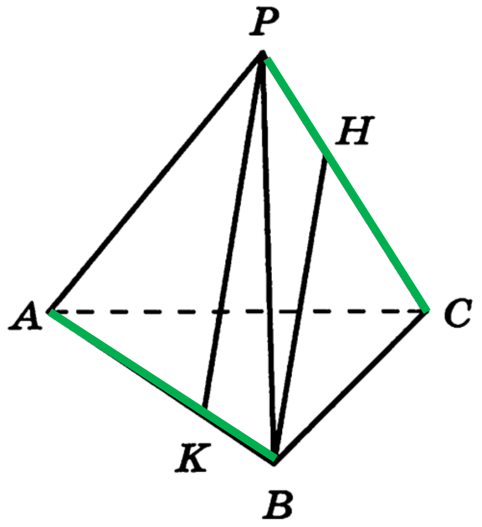


- Две прямые лежат в одной плоскости и НЕ имеют общей точки (**параллельные прямые**, $\ell \parallel \ell'$).
  $\ell \cap \ell' = \emptyset, \exists \alpha\colon \ell \subset \alpha, \ell' \subset \alpha$



- Две прямые НЕ лежат в одной плоскости (**скрещивающиеся прямые**) .
  $\ell \cap \ell' = \emptyset , \nexists \alpha\colon \ell \subset \alpha, \ell' \subset \alpha$

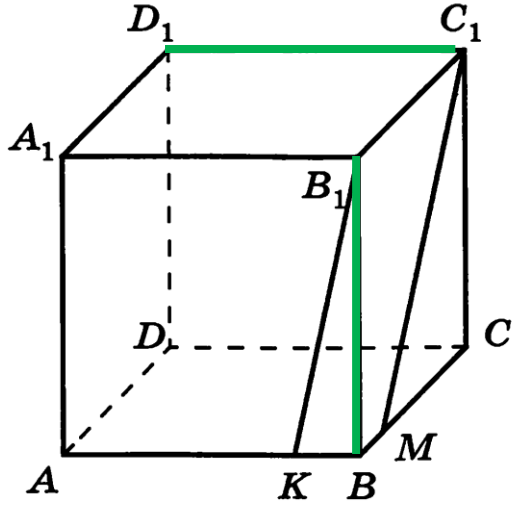
Изображение скрещивающихся прямых на «плоском» чертеже



На «плоском» чертеже две скрещивающиеся прямые изображаются либо пересекающимися, либо параллельными прямыми.

Примеры пар скрещивающихся прямых:

- на тетраэдре PK и BH, AB и PC
- на кубе KB_1 и MC_1, BB_1 и D_1C_1



Скрещивающиеся прямые

Для доказательства того, что две прямые являются скрещивающимися, НЕЛЬЗЯ использовать определение.

Теорема 4 (признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые являются скрещивающимися.

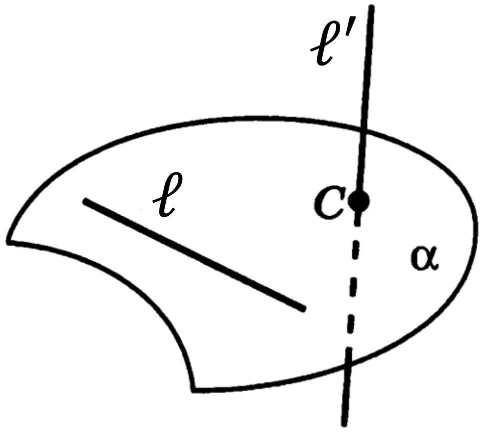
Доказательство: дано: прямые ℓ и ℓ', $\ell \subset \alpha$, $\ell' \cap \alpha = C, C \notin \ell$.

От противного. Пусть ℓ и ℓ' НЕ скрещиваются

$\Rightarrow$ или $\ell \parallel \ell'$, или $\ell \cap \ell' = C$

$\underset{\text{T2,T3}}{\Longrightarrow} \exists\beta: \ \ell \subset \beta, \ \ \ell' \subset \beta.$

Т.к. $\ell \subset \beta$ и $C \in \beta \underset{\text{T1}}{\Rightarrow} \alpha = \beta \ \Rightarrow \ \ell' \subset \alpha.$

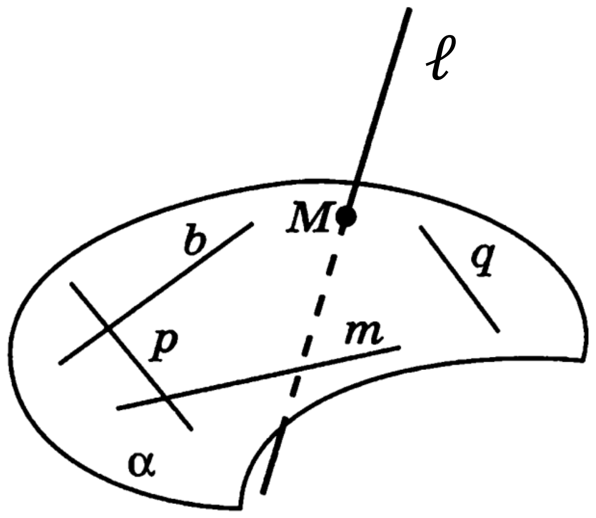


Противоречие. Значит, $\nexists\beta$: $\ell \subset \beta, \ \ell' \subset \beta.$ чтд

Скрещивающиеся прямые

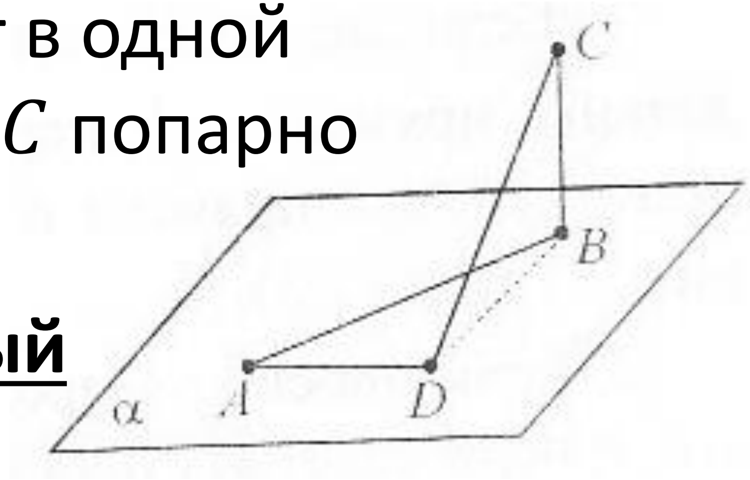
<u>Следствие 1</u>. Если прямая пересекает плоскость, то она скрещивается с любой прямой, лежащей в данной плоскости и не проходящей через точку M.

$$\begin{cases} \ell \cap \alpha = M \\ \forall m \subset \alpha : M \notin m \end{cases} \Rightarrow$$



прямые ℓ и m скрещиваются.

Пространственный четырёхугольник



<u>Следствие</u>. Если четыре точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD, AC и BD, AD и BC попарно скрещиваются.

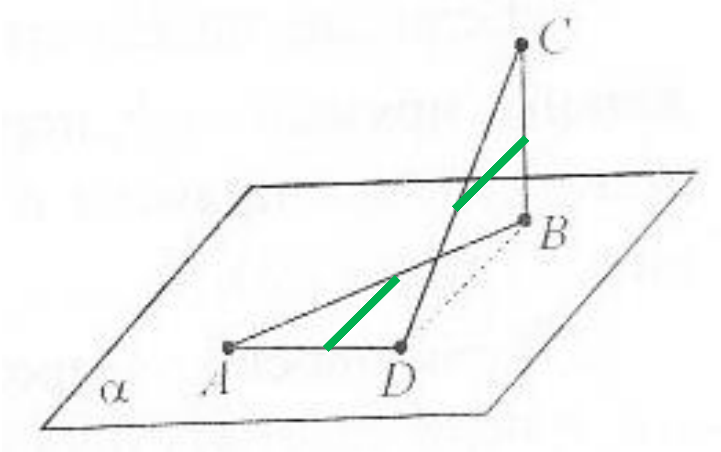
<u>Опр.</u> $C \notin (ADB)$, тогда $ABCD$ – **<u>пространственный четырёхугольник</u>**.

В обозначении необходимо точно указывать порядок вершин, т.е. отрезки $AB \to BC \to CD \to DA$, т.к. четыре точки в пространстве задают несколько различных пространственных четырёхугольников.

Это плоский четырёхугольник, «согнутый» по одной из диагоналей.

Свойства пространственного четырёхугольника

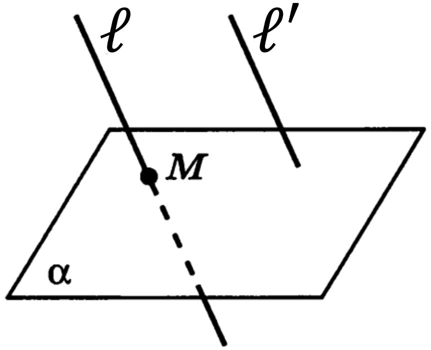
<u>Утв. 1</u>. Середины отрезков соседних сторон пространственного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.



<u>Утв. 2</u>. Два отрезка, соединяющих середины противоположных сторон пространственного четырёхугольника, и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Свойства параллельных прямых

Теорема 5. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



Доказательство:

дано: прямые ℓ и ℓ', $\ell \parallel \ell'$, $\ell \cap \alpha = M$.

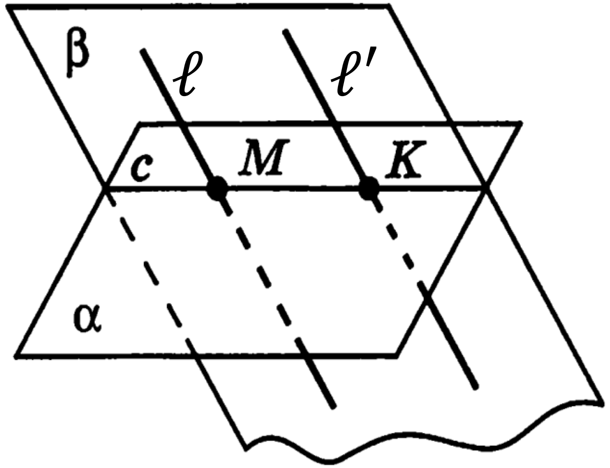
$\underset{\text{Т3}}{\Rightarrow} \exists\beta: \ell \subset \beta, \ell' \subset \beta.$

$M \in \alpha \cap \beta \underset{R5}{\Rightarrow} \alpha \cap \beta = c, M \in c.$

В плоскости β по теореме планиметрии

$\ell \cap c = M \neq \emptyset$ и $\ell \parallel \ell' \Longrightarrow \ell' \cap c = K \neq \emptyset$

$c \subset \alpha \Longrightarrow K \in \alpha \Longrightarrow \ell' \cap \alpha = K \neq \emptyset$



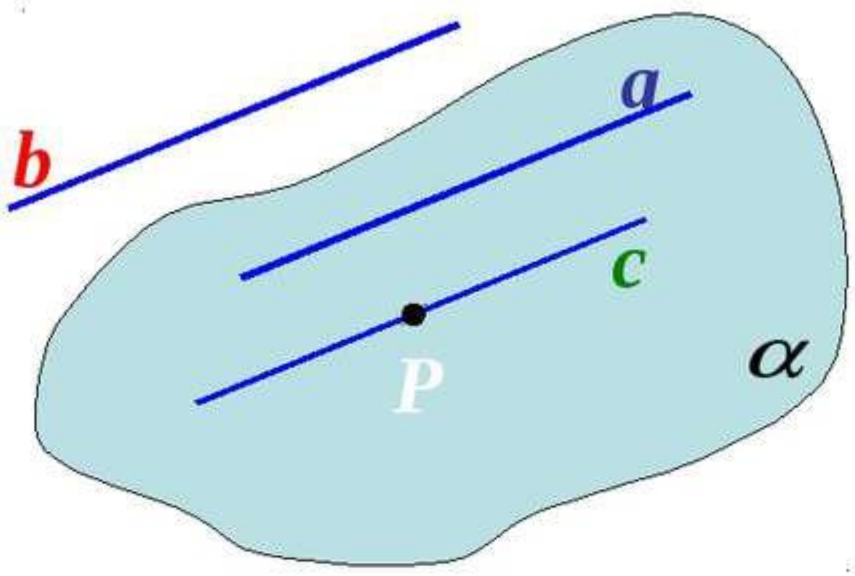
чтд

Свойства параллельных прямых

<u>Следствие 1</u>. Если одна из двух параллельных прямых лежит в данной плоскости, то другая, параллельная ей прямая, НЕ может эту плоскость пересекать .

Прямые ℓ и ℓ', $\ell \parallel \ell'$, $\ell \subset \alpha \Longrightarrow$

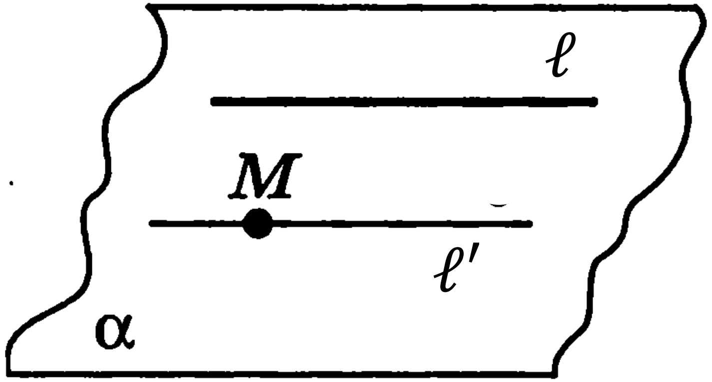
$$\left[\begin{array}{l} \ell' \parallel \alpha \\ \ell' \subset \alpha \end{array}\right.$$



Свойства параллельных прямых

<u>Теорема 6</u>. Через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом ровно одну.

<u>Доказательство:</u>



<u>дано</u>: прямая ℓ и точка $M \notin \ell$.

$\underset{\mathrm{T1}}{\Rightarrow} \exists \alpha: \ell \subset \alpha,\ M \in \alpha$

В плоскости α по аксиоме планиметрии

$\exists!\ \ell' : M \in \ell'$ и $\ell \parallel \ell'$

Покажем, что в пространстве $\nexists\ \ell'': M \in \ell''$ и $\ell \parallel \ell''$

От противного. Пусть $\exists\ \ell'': M \in \ell''$ и $\ell \parallel \ell'' \Rightarrow \ell'' \not\subset \alpha \Rightarrow \ell'' \cap \alpha = M$

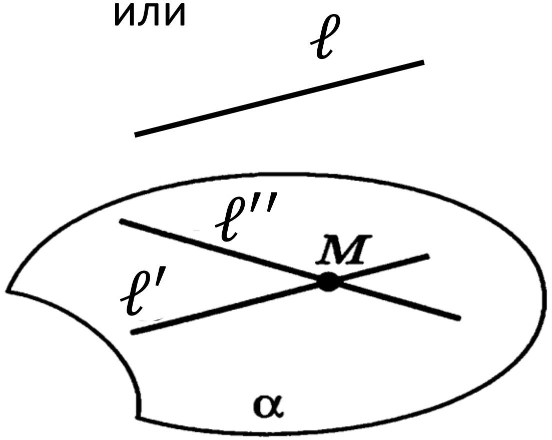
$\underset{\mathrm{T5}}{\Rightarrow}$ прямая ℓ пересекает плоскость α. Но $\ell \subset \alpha$. Противоречие.

ЧТД

Свойства параллельных прямых

<u>Следствие 2</u>. Из двух пересекающихся прямых только одна может быть параллельна некоторой данной прямой.

или



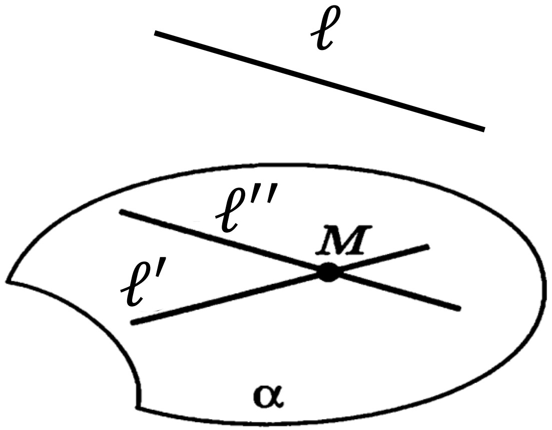
<u>Дано</u>:

прямая ℓ и прямые $\ell'' \cap \ell' = M$

$\Rightarrow$ или $\ell' \parallel \ell$

или $\ell'' \parallel \ell$

или



Признак параллельности прямых

<u>Теорема 7</u>. **<u>(Свойство транзитивности)</u>** Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

<u>Доказательство:</u>

<u>дано</u>: прямые ℓ , ℓ', ℓ'': $\ell \parallel \ell', \ell \parallel \ell''$.

Если $\exists \beta : \ell \subset \beta, \ell' \subset \beta, \ell'' \subset \beta$, то по теореме планиметрии $\ell' \parallel \ell''$.

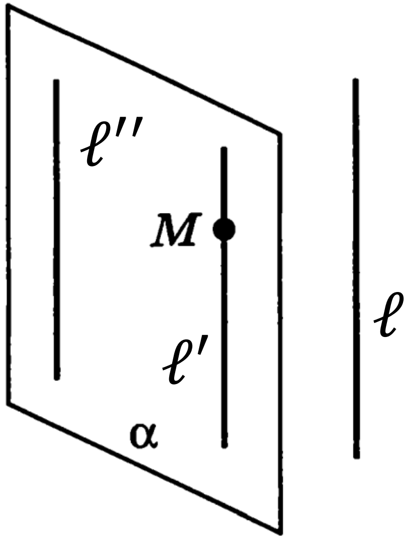
Пусть ℓ , ℓ', ℓ'' не лежат в одной плоскости.

Рассмотрим $\forall M \in \ell' \underset{\text{Т1}}{\Rightarrow} \exists \alpha : \ell'' \subset \alpha, M \in \alpha$.

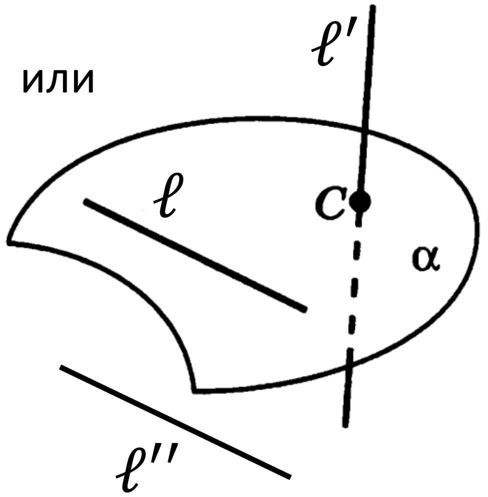
$\underset{\text{Сл1}}{\Longrightarrow} \ell$ не может пересекать $\alpha \underset{\text{Сл1}}{\Longrightarrow} \ell'$ не может пересекать α

$\Longrightarrow \ell' \subset \alpha \underset{\text{Т6}}{\Rightarrow} \ell'$ и ℓ'' не могут пересекаться,

и, т.к. $\ell' \subset \alpha$ и $\ell'' \subset \alpha \Rightarrow \ell' \parallel \ell''$ чтд



Свойства параллельных прямых



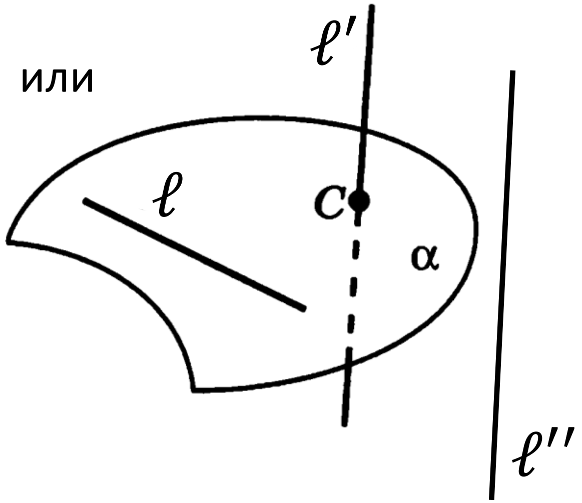
<u>Следствие 3</u>. Из двух скрещивающихся прямых только одна может быть параллельна некоторой данной прямой.

<u>Дано</u>:

прямые ℓ и ℓ' - скрещивающиеся

$\Rightarrow$ или $\ell \parallel \ell''$

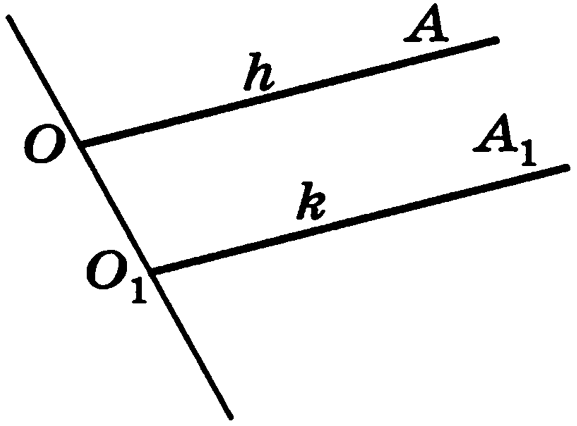
или $\ell' \parallel \ell''$

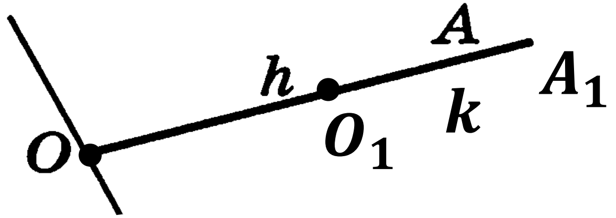


Сонаправленные лучи в пространстве

<u>Опр</u>. Лучи OA и O_1A_1 в пространстве называются **<u>сонаправленными (одинаково направленными)</u>** , если они лежат на параллельных прямых и расположены в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начала, или если один из них содержится в другом.

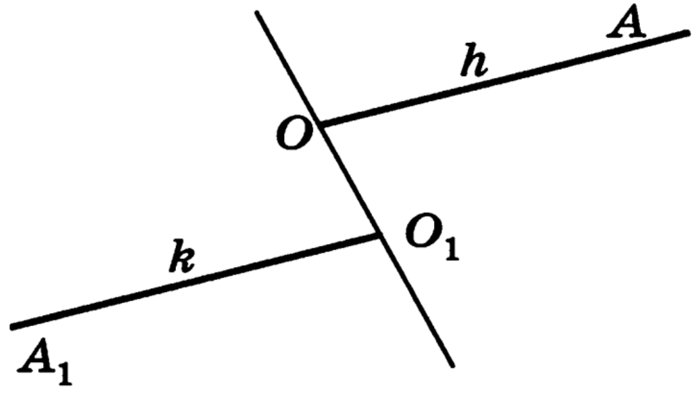
<u>Обозначение</u>: $OA \upuparrows O_1A_1$.

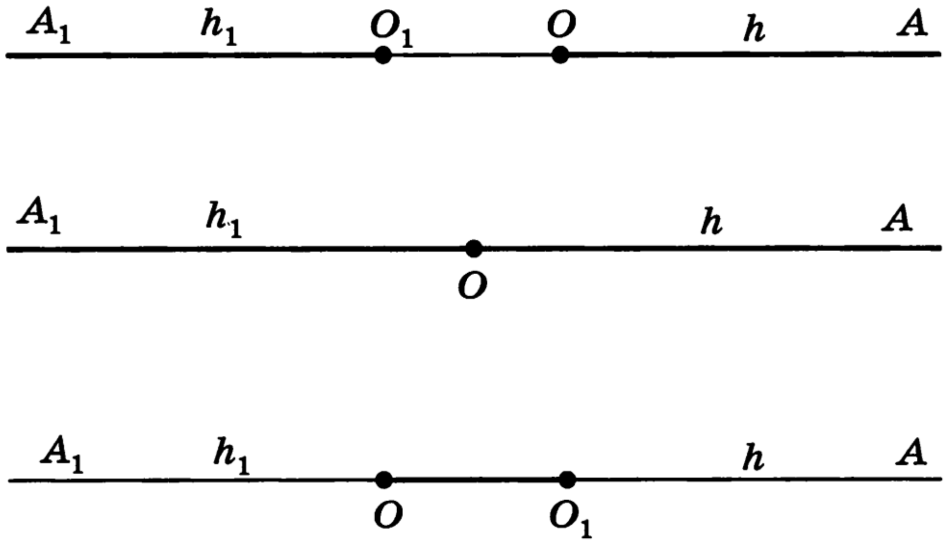




Противоположно направленные лучи в пространстве

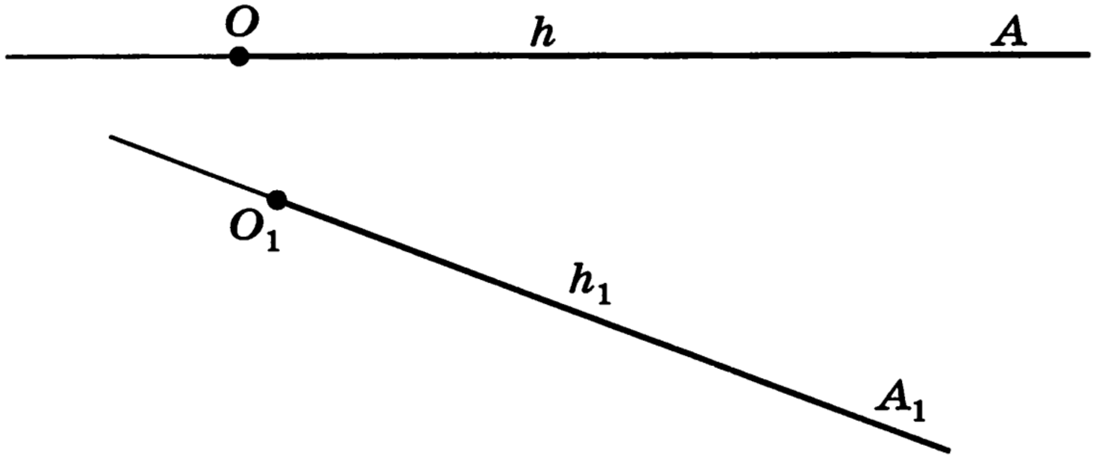
<u>Опр</u>. Лучи OA и O_1A_1 называются **<u>противонаправленными (противоположно направленными)</u>**, если они лежат на параллельных прямых и расположены в различных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через их начала, или если лучи лежат на одной прямой и либо не имеют общих точек, либо их пересечением является точка, либо их пересечением является отрезок этой прямой. <u>Обозначение</u>: $OA \uparrow\downarrow O_1A_1$





Произвольные лучи в пространстве

Если лучи не лежат на параллельных прямых или на одной прямой, то они не сонаправлены и не противоположно направлены.



Угол в пространстве между лучами с общим началом

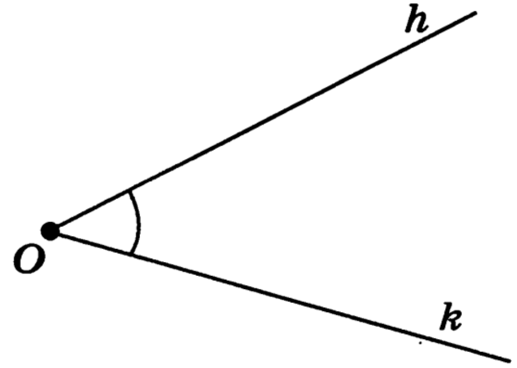
<u>Опр</u>.

<u>Угол между сонаправленными лучами с общим началом</u> примем за $0°$.

<u>Угол между противоположно направленными лучами с общим началом</u> примем равным $180°$.

<u>Угол между произвольными лучами с общим началом</u> примем равным соответствующему плоскому углу: $\angle(h;k) = (\widehat{h;k})$.

$\angle(h;k) = (\widehat{h;k}) \in [0°;180°]$



Угол в пространстве между лучами, не имеющими общего начала

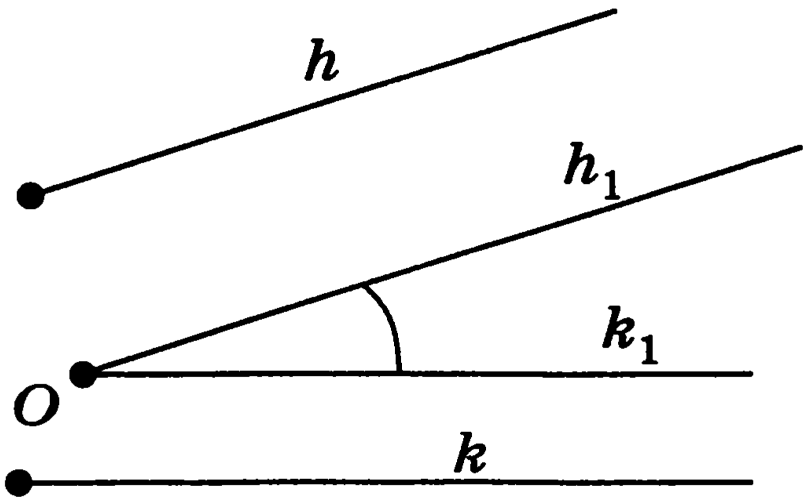
Дано: лучи h и k, не имеющие общего начала.

Рассмотрим $\forall$ точку O в пространстве.

От нее отложим лучи $h_1 \upuparrows h$ и $k_1 \upuparrows k$.

Опр. Угол в пространстве между лучами h и k, не имеющими общего начала, будем считать равным $\angle(h_1; k_1)$

и обозначать $\angle(h; k) = \widehat{(h; k)}$.



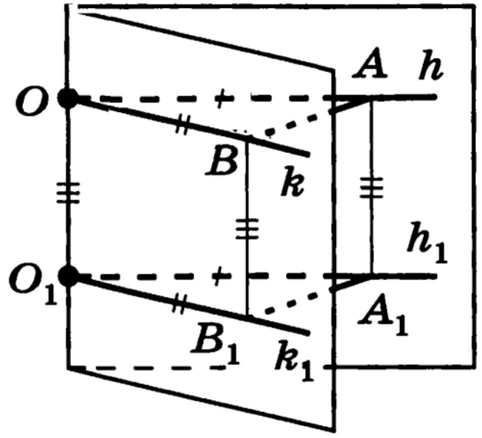
Корректность определения угла в пространстве между лучами, не имеющими общего начала

<u>Теорема 8</u> Два угла с попарно сонаправленными сторонами равны. (Другими словами: введенное выше определение корректно и не зависит от выбора точки O.)

<u>Доказательство:</u> <u>дано</u>: лучи h и k с началом в точке O и лучи h_1 и k_1 с началом в точке O_1, причем $h_1 \uparrow\uparrow h$ и $k_1 \uparrow\uparrow k$.

Пусть данные углы не лежат в одной плоскости. Рассмотрим $\forall A \in h$ и $\forall B \in k$.

$A_1\colon\ A_1 \in h_1,\ \ O_1A_1 = OA$ и $B_1\colon\ B_1 \in k_1,\ \ O_1B_1 = OB$.



$O_1A_1 = OA$ и $O_1A_1 \parallel OA \Rightarrow OAA_1O_1$ - параллелограмм

$\Rightarrow AA_1 = OO_1$ и $AA_1 \parallel OO_1$. Аналогично $BB_1 = OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1$

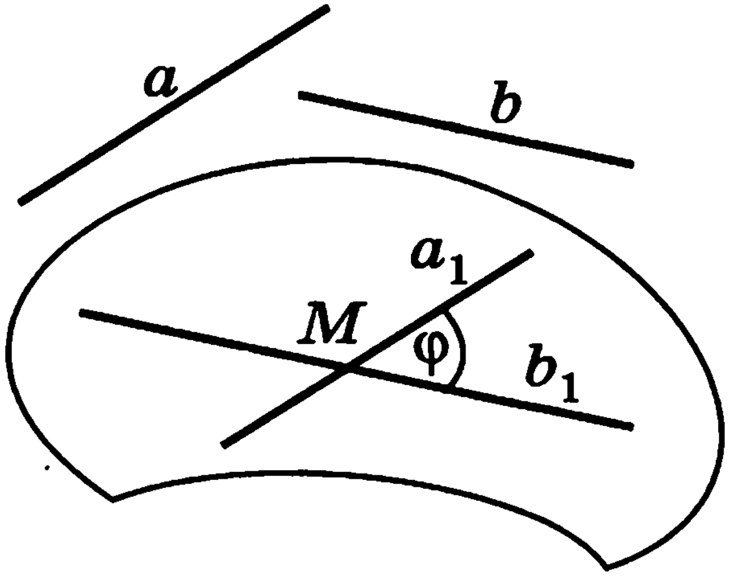
$\Rightarrow ABB_1A_1$ - параллелограмм $\Rightarrow AB = A_1B_1$

$\underset{\text{III пр.}}{\Longrightarrow} \triangle AOB = \triangle A_1O_1B_1 \Rightarrow \angle AOB = \angle A_1O_1B_1 \Rightarrow \angle(h;k) = \angle(h_1;k_1)$ чтд

Угол между прямыми в пространстве

<u>Опр</u>. <u>Угол между параллельными прямыми</u> будем считать равным $0°$.

<u>Угол между пересекающимися прямыми</u> будем счита равным наименьшему из углов, образованных этими прямыми.



Пусть a и b - скрещивающиеся прямые.

Рассмотрим $\forall$ точку M в пространстве. От нее отложи прямые $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$, т.е. $M = a_1 \cap b_1$.

<u>Угол φ между скрещивающимися прямыми</u>

a и b будем считать равным углу между параллельными им пересекающимися прямыми $\angle(a_1; b_1)$ и обозначать $\varphi = \angle(a; b) = (\widehat{a; b}) = (\widehat{a_1; b_1})$.

Угол между прямыми в пространстве

<u>Следствие</u>. Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M. Другими словами, введенное выше определение корректно.

$$\boxed{\angle(a; b) \in [0°; 90°]}$$

<u>Опр</u>. **<u>Две прямые в пространстве</u>** называются **<u>перпендикулярными</u>**, если величина угла между ними равна $90°$.

<u>Следствие</u>. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна некоторой прямой, то и вторая прямая перпендикулярна этой прямой.

$$\ell \parallel \ell_1, \ell \perp \ell' \Rightarrow \ell_1 \perp \ell'$$

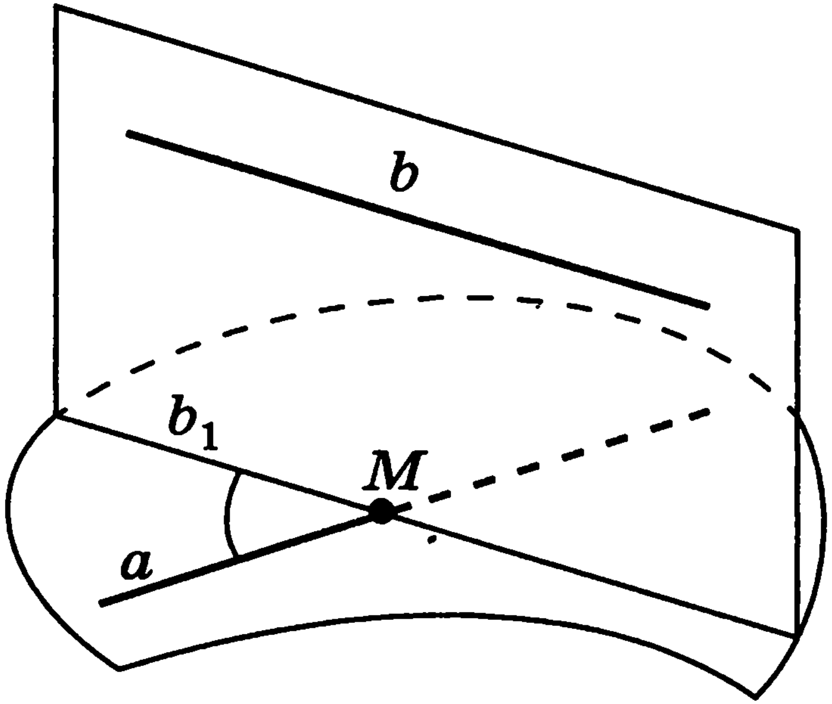
Замечание

Для нахождения угла между скрещивающимися прямыми удобно поступать так:

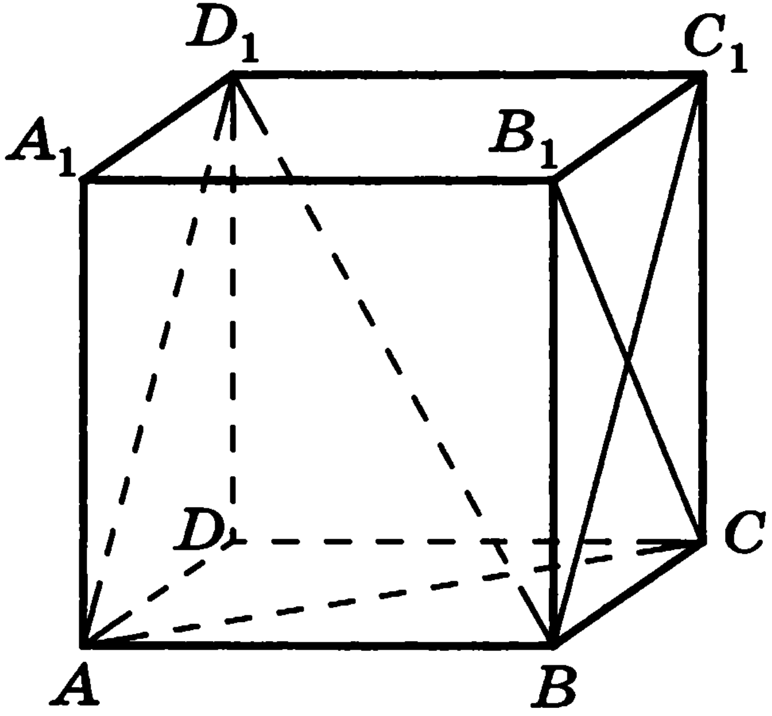
Рассмотрим $\forall M \in a$

Проведем $b_1 \parallel b$: $M \in b_1$

$\angle(a; b) = \angle(a; b_1)$



Угол между скрещивающимися прямыми. Примеры 1



<u>Дано</u>: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

$BC \perp DD_1$

$AB \perp B_1C_1$

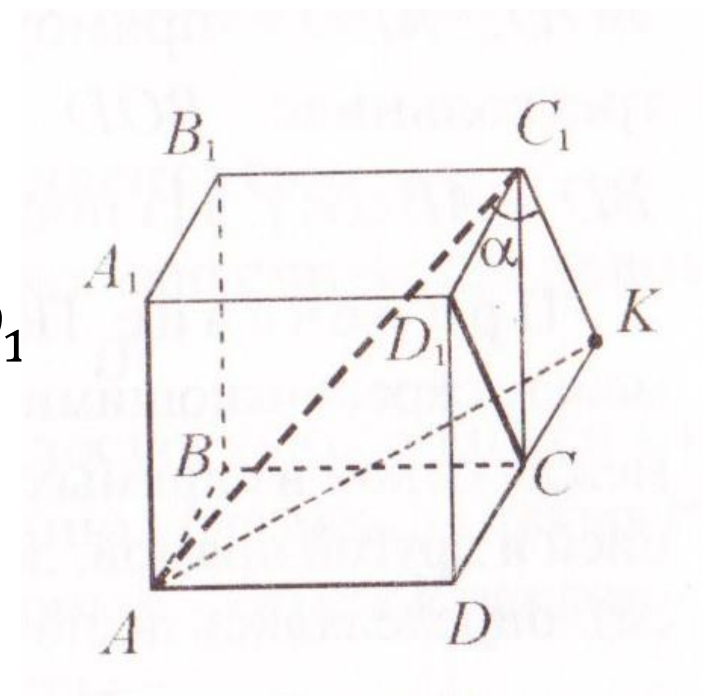
$AD \perp CC_1$

(скрещивающиеся ребра куба)

$\angle(B_1C; AA_1) = 45°$

$\angle(AC; BC_1) = 60°$ (скрещивающиеся диагонали соседних (смежных) граней куба)

Угол между скрещивающимися прямыми. Параллельное проектирование. Пример 2



Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной a

Найти: угол между скрещивающимися диагональю куба и диагональю грани куба, т.е. $\angle(AC_1; CD_1)$

Решение: $K \in DC, KC = CD \Rightarrow KC = C_1D_1, KC \parallel C_1D_1$

$\Rightarrow CKC_1D_1$ - параллелограмм

$\Rightarrow C_1K \parallel CD_1, C_1K = CD_1 = a\sqrt{2}$

Диагональ куба $AC_1 = a\sqrt{3}$.

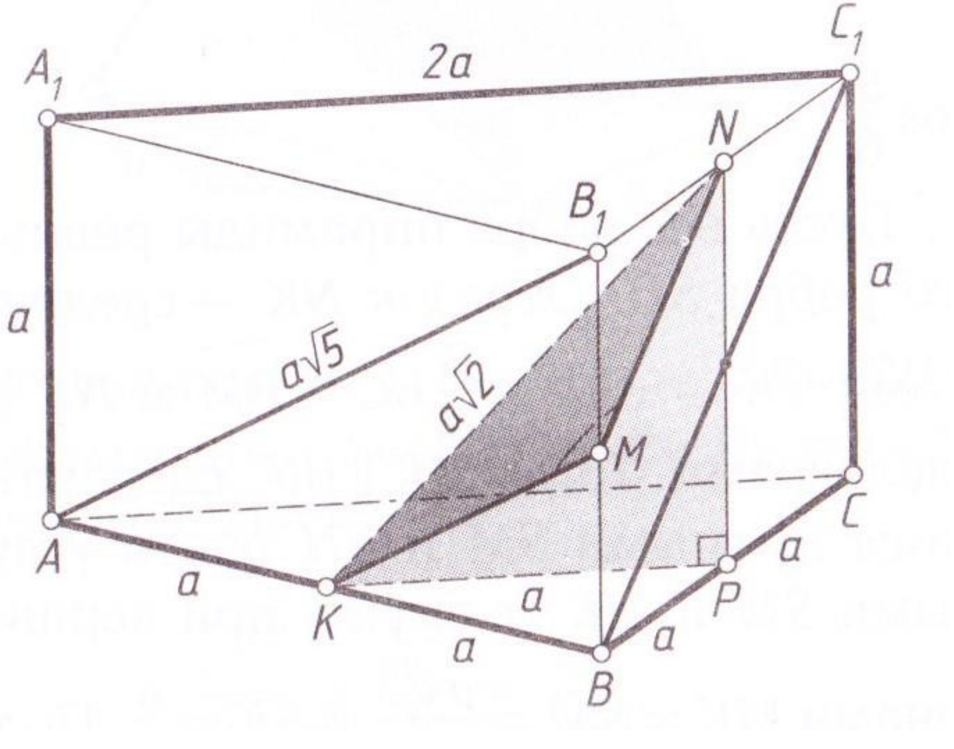
$\triangle AKD: AK = a\sqrt{5} \xRightarrow[\text{т. cos для} \triangle AC_1K]{}$

$\cos\angle(AC_1; CD_1) = \cos\angle(AC_1; C_1K) = \frac{3a^2+2a^2-5a^2}{2\sqrt{6}a^2} = 0 \Rightarrow AC_1 \perp CD_1$

Угол между скрещивающимися прямыми. Параллельное проектирование. Пример 3

Дано: правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, ABC – основание, $AB = 2AA_1 = 2a$

Найти: косинус угла между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней правильной треугольной призмы, т.е. $\cos\angle(AB_1; BC_1)$



Угол между скрещивающимися прямыми. Пример 3

<u>Решение</u>: $N \in B_1C_1, B_1N = NC_1 = a\,, M \in BB_1, B_1M = MB = \frac{a}{2}$

$K \in AB, AK = KB = a$

KM и MN – средние линии в $\triangle ABB_1$ и $\triangle BCC_1$ соответственно.

$KM \parallel AB_1, KM = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}, MN \parallel BC_1, MN = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

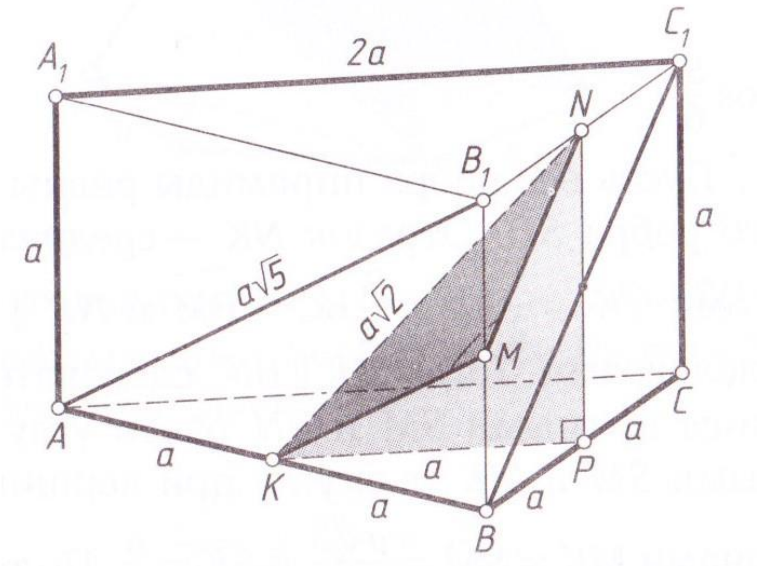
$P = Pr_{\perp ABC}(N), P \in BC, BP = PC = a,$

KP - средняя линия в $\triangle ABC, KP \parallel AC,\ KP = \frac{1}{2}AC = a.$

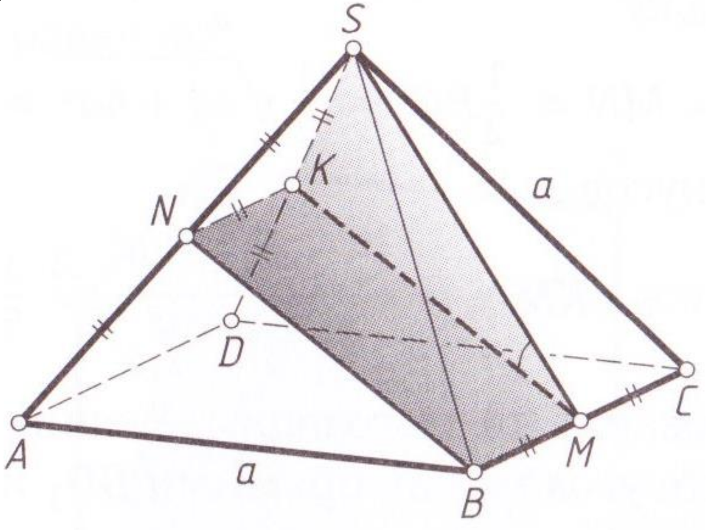
$\triangle KPN$ – прямоугольный, $KN = a\sqrt{2} \xRightarrow[\text{т. cos для} \triangle KMN]{}$

$\cos\angle(AB_1; BC_1) = \cos\angle(KM; MN) =$

$$= \cos\angle KMN = \frac{\frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - 2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{5}$$



Угол между скрещивающимися прямыми. Параллельное проектирование. Пример 4



Дано: правильная четырехугольная пирамида $SABCD$
$ABCD$ – основание, все рёбра равны a,

$M \in BC,\ BM = MC,\ N \in SA,\ \ SN = NA$

Найти: $\cos\angle(SM; BN)$

Решение: $K \in SD, SK = KD = \frac{a}{2}$

NK – средняя линия в $\triangle SAD \Rightarrow NK \parallel AD \parallel BC$

$NK = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} = BM \ \Rightarrow NKBM$ - параллелограмм

$\Rightarrow MK \parallel BN \Rightarrow MK = BN = SM = \frac{\sqrt{3}a}{2} \xRightarrow[\text{т. cos для} \triangle SKM]{}$

$\cos\angle(SM; BN) = \cos\angle(SM; MK) = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{6}$

Угол между скрещивающимися прямыми. Параллельное проектирование. Пример 5

Дано: правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$, $ABCDEF$ – основание, боковые рёбра вдвое больше ребра основания a,

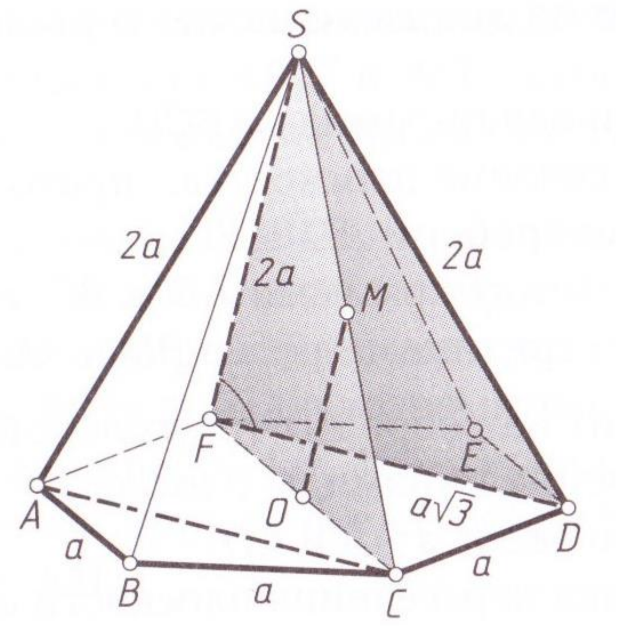
O – центр основания, $M \in SC$, $SM = MC$

Найти: $\cos\angle(OM; AC)$

Решение: OM – средняя линия в $\triangle SFC \Rightarrow OM \parallel SF$, $OM = \frac{SF}{2}$

$FD \parallel AC, FD = AC = a\sqrt{3} \Rightarrow$ и $FD = FS = 2a$

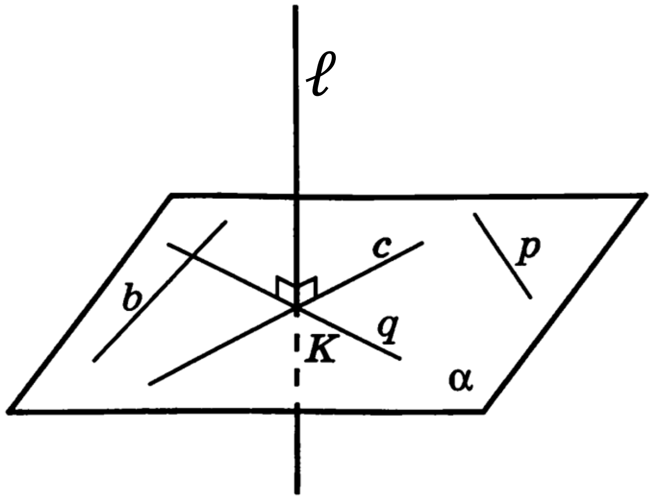
$$\xRightarrow[\text{рб}\triangle SFD]{} \cos\angle(OM; AC) = \cos\angle(SF; FD) = \frac{\frac{1}{2}DF}{SF} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



Замечание. Терминология 1

<u>**Опр**</u>. <u>**Прямая перпендикулярна плоскости**</u>, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в данной плоскости.

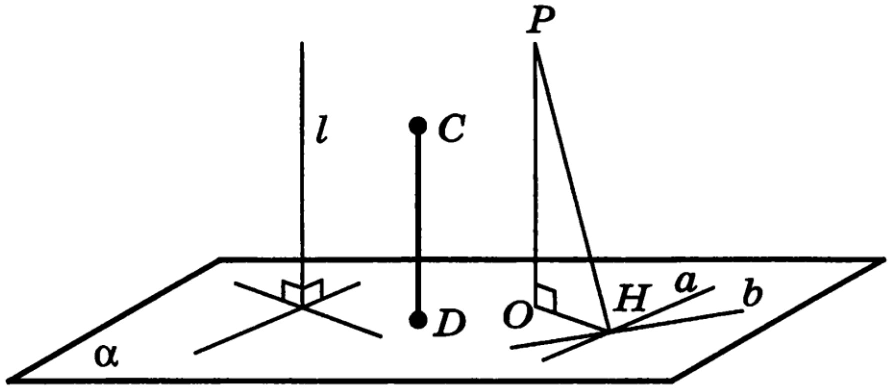
<u>Обозначение</u>: $\ell \perp \alpha$



<u>**Опр**</u>. <u>**Наклонная к плоскости**</u> – любая прямая, пересекающая данную плоскость, но не перпендикулярная ей.

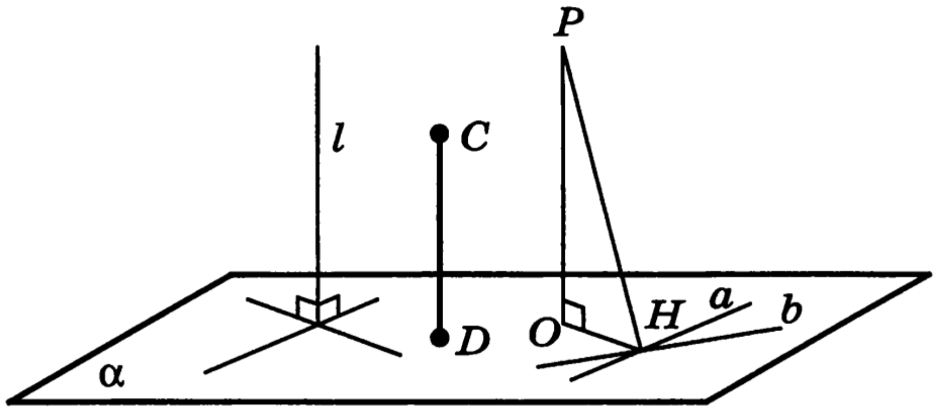
PH – наклонная

точка H – <u>**основание наклонной**</u>



Замечание. Терминология 2

<u>**Опр**</u>. Отрезок прямой, перпендикулярной данной плоскости, один конец которого принадлежит данной плоскости, а другой – данная точка, называется <u>**перпендикуляром, проведенным из данной точки к плоскости**</u> (это отрезок PO). Конец этого отрезка, принадлежащий плоскости, называется **основанием перпендикуляра** (это точка O). Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость, называется <u>**расстоянием от этой точки до данной плоскости**</u>.

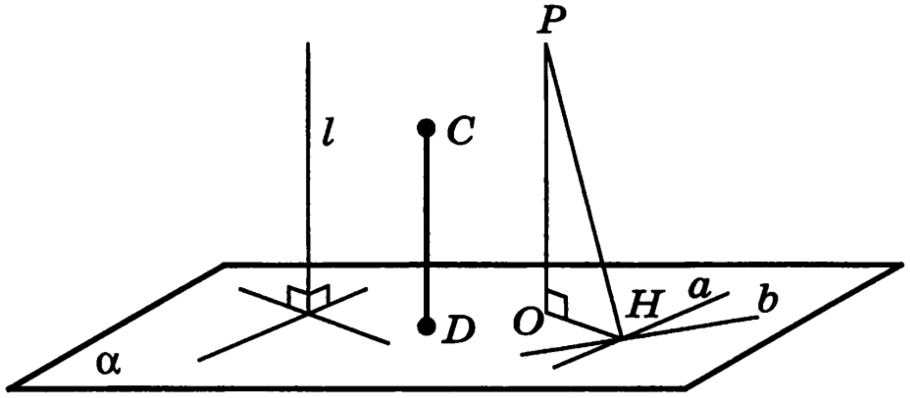


Замечание. Терминология 3

<u>Опр</u>. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и отрезка наклонной, проведенных к плоскости из одной точки, называется **<u>ортогональной проекцией отрезка наклонной на эту плоскость</u>**.

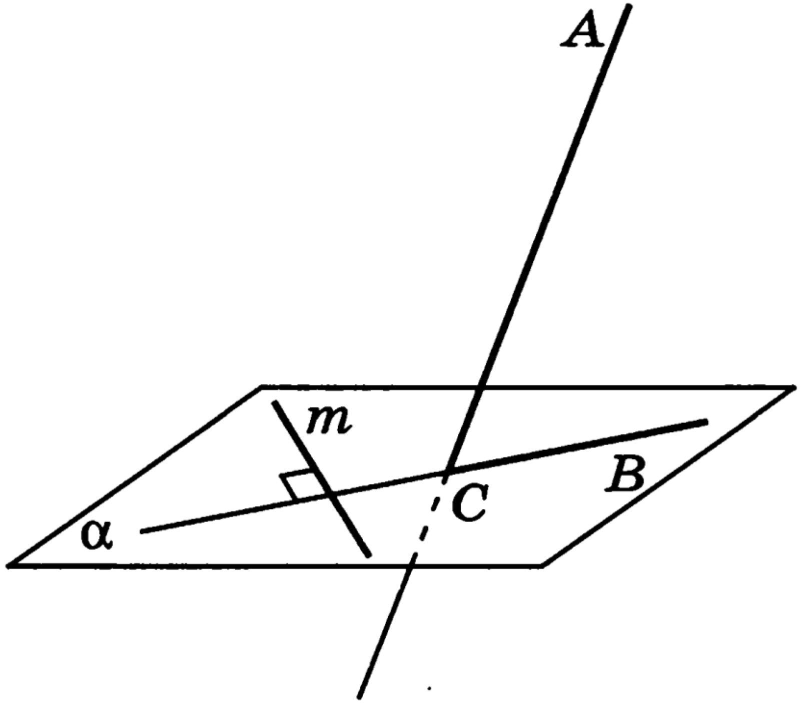
<u>Обозначение</u>: $Pr_{\perp\alpha}(PH) = OH$

<u>Ортогональной проекцией наклонной на плоскость</u> является прямая, содержащая основания всех перпендикуляров, проведенных к заданной плоскости через все точки этой наклонной.

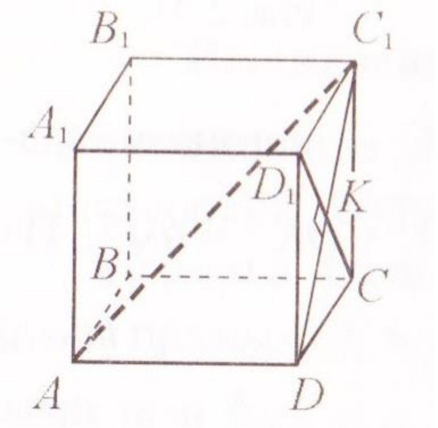


Теорема о трех перпендикулярах

Теорема 16. (Теорема о трех перпендикулярах - ТТП) Если прямая, лежащая на плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость, то данная прямая перпендикулярна и самой наклонной.



Примеры. Использование ТТП для доказательства перпендикулярности скрещивающихся прямых



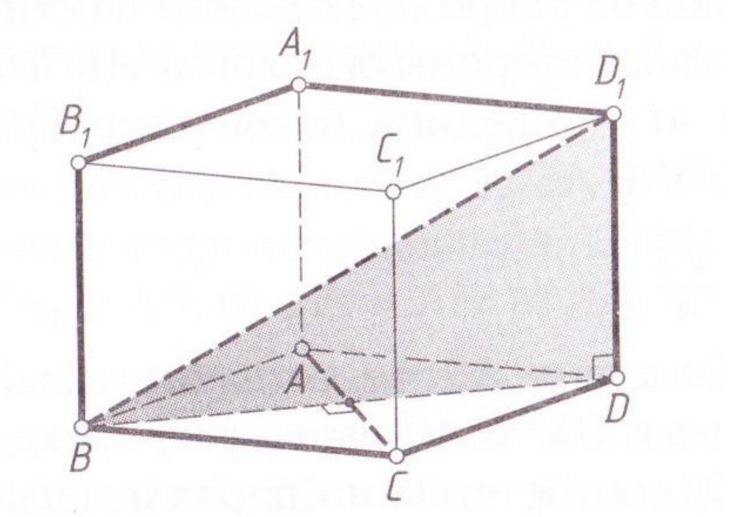
Дано: куб параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Найти: $\angle(CD_1; AC_1)$

Решение: $Pr_{\perp CDD_1}(AC_1) = C_1D$

$C_1D \perp CD_1 \underset{\text{ТТП}}{\Longrightarrow} AC_1 \perp CD_1$, т.е. $\angle(CD_1; AC_1) = 90°$

Дано: прямой параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (основание $ABCD$ - ромб)



Найти: $\angle(BD_1; AC)$

Решение: $Pr_{\perp ABC}(BD_1) = BD$

$ABCD$ – ромб $\Rightarrow AC \perp BD$

$\underset{\text{ТТП}}{\Longrightarrow} BD_1 \perp AC$, т.е. $\angle(BD_1; AC) = 90°$

Теорема о трех косинусах

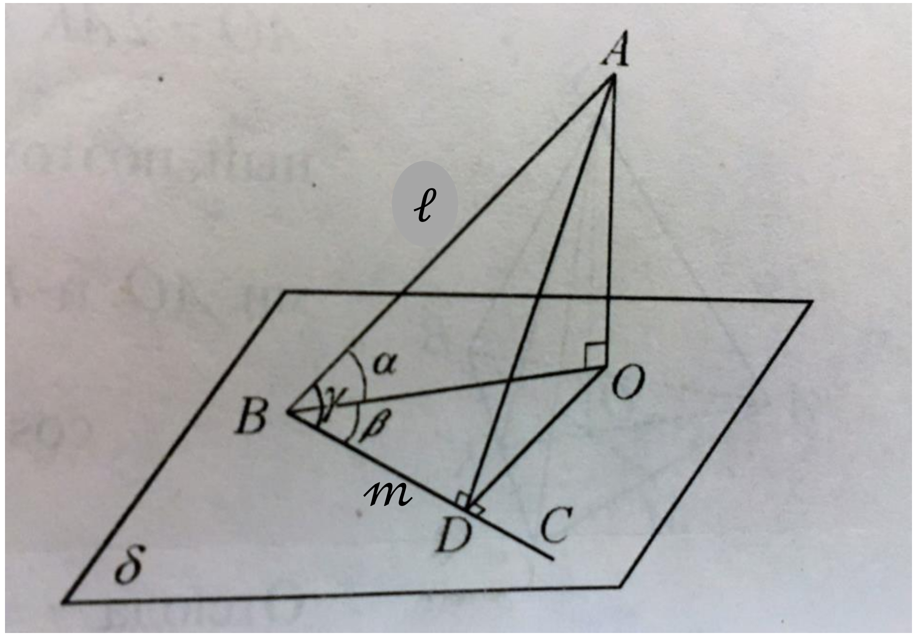
$\gamma = \angle(\ell; m) = \angle(AB; BD)$ - угол между наклонной и заданной прямой

$\alpha = \angle(AB; BO)$ - угол между наклонной и ее проекцией

$\beta = \angle(BO; BD)$ - угол между проекцией наклонной и заданной прямой

$$\boxed{\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

Можно использовать для нахождения угла между скрещивающимися прямыми (важно удачно выбрать плоскость δ, чтобы углы α и β легко вычислялись)



Теорема о трех косинусах. Доказательство

$$\boxed{\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

Доказательство:

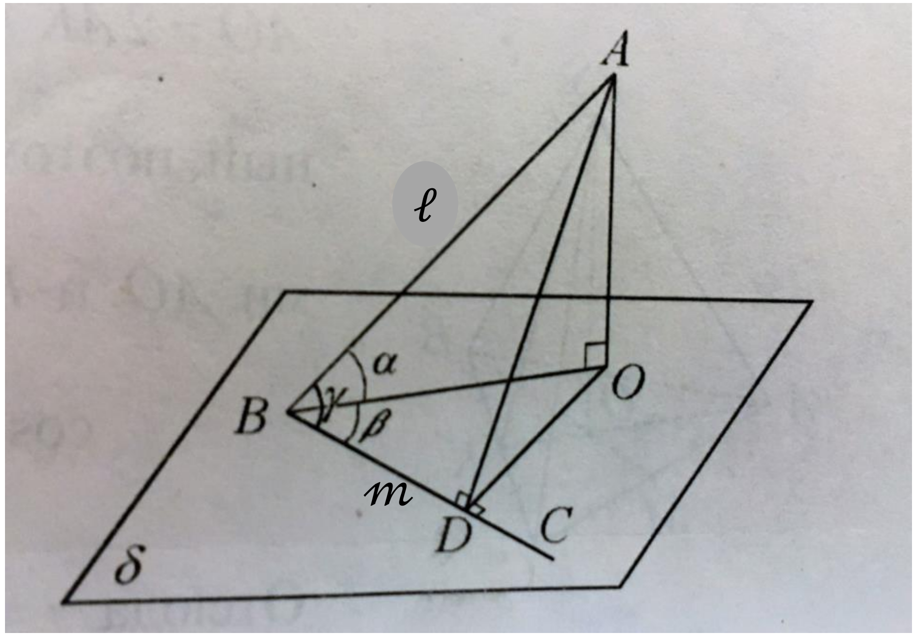
$AO \perp \delta, D \in m,\ OD \perp m \underset{\text{ТТП}}{\Longrightarrow} AD \perp m$

$\Delta AOB\colon \cos\alpha = \dfrac{BO}{AB}$

$\Delta BOD\colon \cos\beta = \dfrac{BD}{BO}$

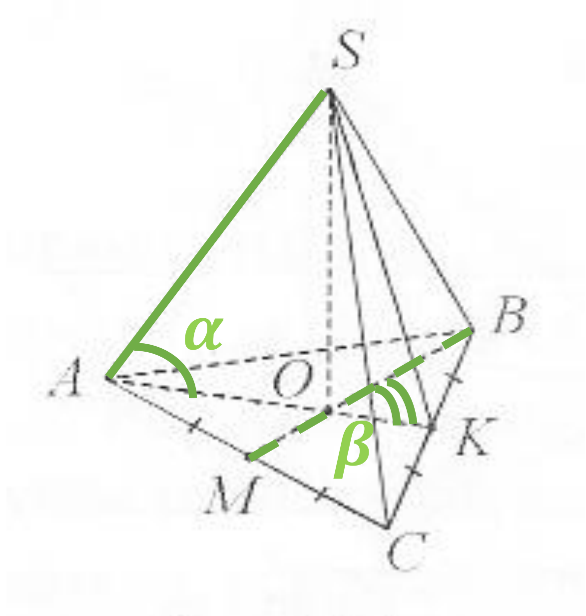
$\Delta ABD\colon \cos\gamma = \dfrac{BD}{AB}$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{BO}{AB} \cdot \dfrac{BD}{BO} = \dfrac{BD}{AB} = \cos\gamma$



ЧТД

Пример использования теоремы о трех косинусах



<u>Дано</u>: правильный тетраэдр $SABC$

<u>Найти</u>: косинус угла между боковым ребром и не пересекающей его медианой основания.

$\cos\angle(AS; BM) = ?$

<u>Решение</u>:

$\gamma = \angle(AS, BM)$ - угол между наклонной и заданной прямой

$\triangle ABC$ р/с, $SO \perp ABC$, O – центроид, $AO = \frac{2}{3}AK = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\alpha = \angle(AS, AO) = \angle SAO$ - угол между наклонной и ее проекцией

$\triangle ASO$: $\angle O = 90°, \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\beta = \angle(AO, BM) = \angle AOM = 60°$ - угол между проекцией наклонной и заданной прямой

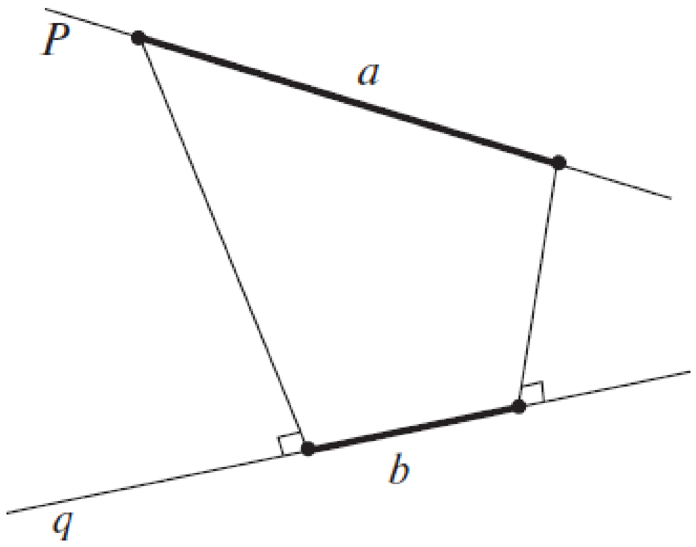
$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

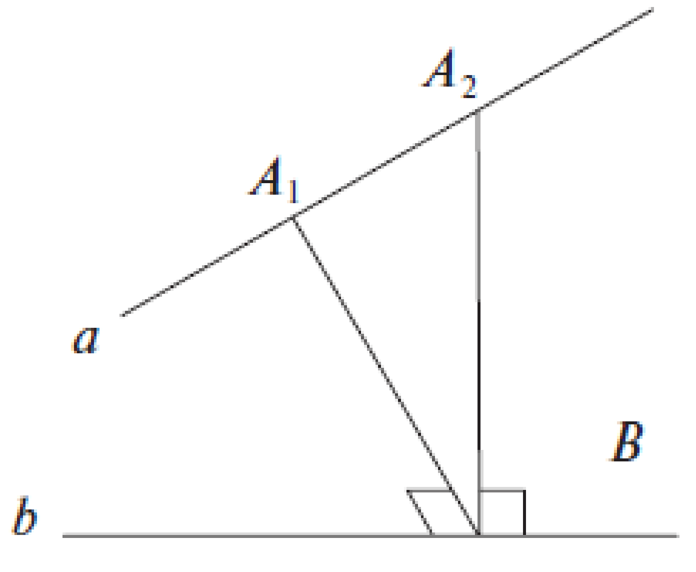
Метод проектирования отрезка одной из скрещивающихся прямых на другую

Метод: на одной из двух данных прямых берем две произвольные точки и проектируем их на другую прямую. Исходные прямые перпендикулярны ⇔ проекции точек совпадают.

В общем случае $b = a \cdot \cos\angle(p; q)$, где

b – ортогональная проекция a на q.

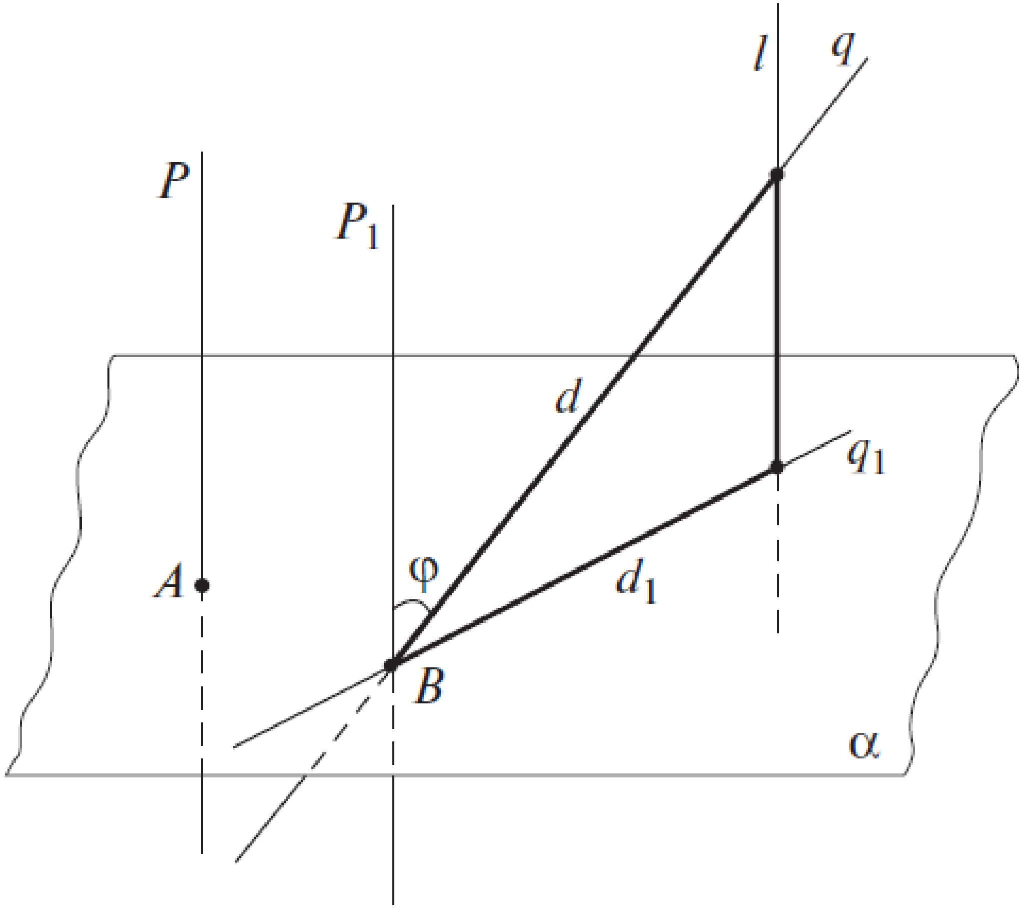




Если точка B — проекция A_1 и A_2 на прямую b, то $a \perp b$

Метод проектирования одной из скрещивающихся прямых на плоскость, перпендикулярную второй прямой

<u>Метод</u>: выбрать плоскость, перпендикулярную одной из двух данных прямых, спроектировать отрезок длины d второй прямой с одним из концов в данной плоскости на эту плоскость, пусть длина полученной проекции равна d_1. Тогда $d_1 = d \cdot \sin\angle(p; q)$.



Основные методы вычисления угла между скрещивающимися прямыми и установления их перпендикулярности

- параллельный перенос
- использование ТТП (для доказательства перпендикулярности прямых)
- теорема о трех косинусах
- векторный метод (по формуле скалярного произведения)
- координатный метод
- проектирование одной из скрещивающихся прямых на плоскость, перпендикулярную второй прямой

Дополнительные методы вычисления угла между скрещивающимися прямыми и установления их перпендикулярности

- проектирование отрезка одной из скрещивающихся прямых на другую
- использование перпендикулярных плоскостей
- использование параллельности прямой и плоскости
- векторный метод (с использованием замкнутой ломаной)
- (*) использование вспомогательного тетраэдра (требуется знать длины всех его ребер)
- (*) использование направляющих косинусов
- (*) метод объемов