МАОУ Лицей НИП
г. Королев Московской области
учитель Волкова Ольга Ивановна

Подготовка к олимпиадам 10 класс. Задачи

1. Свойства квадратного трехчлена, логические задачи

1.1. Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на любой горизонтали, вертикали и диагонали находилось четное число фишек?

1.2. Рассматриваются квадратичные функции вида $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2009$. Найдите точку, в которой пересекаются все графики таких функций.

1.3. Рассмотрим всевозможные пары различных натуральных чисел от 1 до 100 (пары (a, b) и (b, a) считаются одинаковыми). Вычисляется произведение чисел в каждой паре. Найдите количество четных чисел среди полученных произведений.

1.4. Можно ли числа 2,3,…2008 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе наибольшее число равнялось сумме остальных чисел этой группы?

1.5. По кругу записаны N натуральных чисел, сумма которых равна 94. Известно, что каждое число равно по модулю разности двух следующих за ним чисел. Найти все возможные значения N.

1.6. Найдите наименьшее простое число, являющееся делителем числа $3^{11} + 5^{13}$.

1.7. Сколько существует пятизначных чисел с четной суммой цифр?

1.8. Найдите сумму всех трехзначных чисел, все цифры которых нечетны.

1.9. Вдоль забора растет 8 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 225 ягод?

1.10. В королевстве 1001 город. Король приказал проложить между городами дороги так, чтобы из каждого города выходило ровно 7 дорог. Смогут ли подданные справиться с приказом короля?

1.11. Десятичная запись числа А состоит из 30 единиц и нескольких нулей. Может ли число А быть полным квадратом?

1.12. Может ли дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами равняться 23?

1.13. Решить в натуральных числах уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = 2^9$.

1.14. Квадратный трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b и c - целые, c - нечетное) имеет целые корни. Может ли $p(1997)$ быть нечетным числом?

2. Теорема Фалеса, подобие треугольников. Площади. Планиметрия.

2.1. Прямая, параллельная основанию АВ треугольника АВС, площадь которого равна S, отсекает от него треугольник CMN, площадь которого равна S_1. Точка Р лежит на основании АВ. Найдите площадь четырехугольника CMNP.

2.2. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке О. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

2.3. В треугольнике ABC биссектрисы углов А и В пересекают описанную окружность в точках К и L. Отрезки АК и BL пересекаются в точке Х и делятся этой точкой в равных отношениях, считая от вершин треугольника. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2.4. Пусть BC – наибольшая сторона треугольника ABC. На стороне BC взяты такие точки К и L, что BК=BA, CL=CA. На стороне AB взята такая точка M, что BM=BL, а на стороне AC такая точка N, что CN=CК. Докажите, что точки A, К, L, M и N лежат на одной окружности.

2.5. На стороне BC треугольника ABC взята точка M так, что BM=AC. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на отрезок AM. Известно, что BH=CM и $\angle MAC = 30°$. Найдите градусную меру угла $\angle ACB$.

3. Неравенства

3.1. Найдите сумму коэффициентов многочлена при нечетных степенях:
$$\left(2x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 2\right)^3 + \left(x^3 + x^2 - 1\right)^2\left(x^4 - x^2 + 1\right)^2 + (x+1)^4\left(x-1\right)^4$$

3.2. Доказать неравенство $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{8})(1+\frac{1}{15})\bullet\ldots\bullet(1+\frac{1}{n^2\;\;1}) < 2$

3.3. Различные действительные числа a, b и c таковы, что $a^3\left(b-c\right)+b^3\left(c-a\right)+c^3\left(a-b\right)=a^2\left(b-c\right)+b^2\left(c-a\right)+c^2\left(a-b\right)$. Докажите, что $a+b+c=1$.

3.4. Известно, что $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{3}{2}$. Найдите, чему равно $\frac{1}{\left(x-y\right)^2}+\frac{1}{\left(y-z\right)^2}+\frac{1}{\left(z-x\right)^2}$.

3.5. Докажите неравенство $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}>1$.

3.6. Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству $x \geq \frac{1995}{x}$

4. Комбинаторная задача

4.1. У нас есть 9 разных книг. Сколькими способами можно
- Расставить их на полке
- Подарить 3 из них 3 разным людям
- Подарить 3 из них другу
- Распределить все поровну между тремя людьми

4.2. Пусть два числа называются «похожими», если одно из них получается из другого перестановкой цифр. Найдите какую-нибудь пару «похожих» чисел M и N, для которых разность $M-N$ оканчивается на 2006.

4.3. Пусть в городе все телефонные номера 6-значные, начинаются с цифры 5 и любые две соседние цифры отличаются не более, чем на 1. Какое наибольшее число телефонных номеров может быть в этом городе?

4.4. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых встречается хотя бы одна тройка?

4.5. В турнире по олимпийской системе (выбывает проигравший) участвует 50 боксеров. Какое наименьшее количество боев надо провести, чтобы выявить победителя?

4.6. На полке стоит 666 книг по черной и белой магии, причем никакие 2 книги по белой магии не стоят через 13 книг (т.е. между ними не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

5. Другие темы

5.1. На листе бумаги нарисован выпуклый многоугольник M периметра $P=5$ и площади $S=25$. Взяли круг радиуса $r=1$ с центром в каждой точке, лежащей внутри этого многоугольника, и закрасили его. Найдите площадь закрашенной фигуры F.

5.2. Решите в целых числах уравнение $\left(x^2-y^2\right)^2=1+16y$

5.3. При каких целых значениях n выражение $\frac{3n+2}{n+1}$ является натуральным числом?

5.4. Решить в целых числах $x^2=3y^2+2$

5.5. Решить в целых числах $x^2 = 5y^2 + 3$

5.6. Решить в целых числах уравнение $2xy + 3x + y = 0$

5.7. Вдоль окружности расставлены по порядку натуральные числа от 1 до 100. Затем, двигаясь по окружности, стали вычеркивать каждое второе число, т.е. последовательно удаляли числа 2,4,6,…100,3,7,… до тех пор, пока не осталось одно число. Определите, какое число осталось? Выведите формулу для случая, когда на окружности расставлены числа от 1 до N, где N - произвольное натуральное число.

5.8. В киоске есть марки по 1 рублю, открытки по 3 рубля, конверты по 4 рубля и авиаконверты по 7 рублей. Ученик купил 17 предметов, истратив при этом 61 рубль. Купил ли он хоть одну открытку?

5.9. Для приготовления новогодних подарков приготовили 184 мандарина, 138 яблок и разные сладости. Какое наибольшее число подарков можно подготовить, чтобы в каждом из них было поровну мандаринов и поровну яблок? Сколько яблок и сколько мандаринов будет в каждом подарке? (Тот же вопрос для 2142 мандарина, 2040 яблок, 1836 шоколадок.)

5.10. Из двух сцепленных шестеренок одна имеет 16 зубцов, а другая – 28. До начала движения мелом отметили два соприкасающихся зубца. Через сколько оборотов каждой шестеренки будет впервые снова совпадение этих меток? (тот же вопрос для трех шестеренок с количеством зубцов 6, 14 и 20).

5.11. Существуют ли 2000 подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых составное?

5.12. Несколько камней весят вместе 10т, при этом каждый из них весит не более 1т. На каком наименьшем количестве машин грузоподъемностью 3т можно увезти этот груз за один раз?

5.13. Найти все тройки простых чисел p, q и r, для которых числа $|p-q|$, $|q-r|$ и $|r-p|$ - также простые.

6. Прогрессии

6.1. Вычислить сумму $S_n = 1 + 2\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^2 + \cdots + n(\sqrt{2})^{n-1}$

6.2. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$, в которой встречаются подряд следующие члены: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$. Может ли такая последовательность быть арифметической прогрессией? А геометрической прогрессией?

6.3. Разложите на множители $x^n - y^n$, $n \in \mathbb{N}$ (указание: рассмотрите вспомогательную геометрическую прогрессию нужного вам вида).

6.4. Разложите на множители $x^{2n+1} + y^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (указание: рассмотрите вспомогательную геометрическую прогрессию нужного вам вида).