Показательная и логарифмическая функции

Степенная функция вида $y = x^n$, $n > 1$, $n \in \mathbb{Q}$

$n = 2k$

$y = x^4$ - чётная

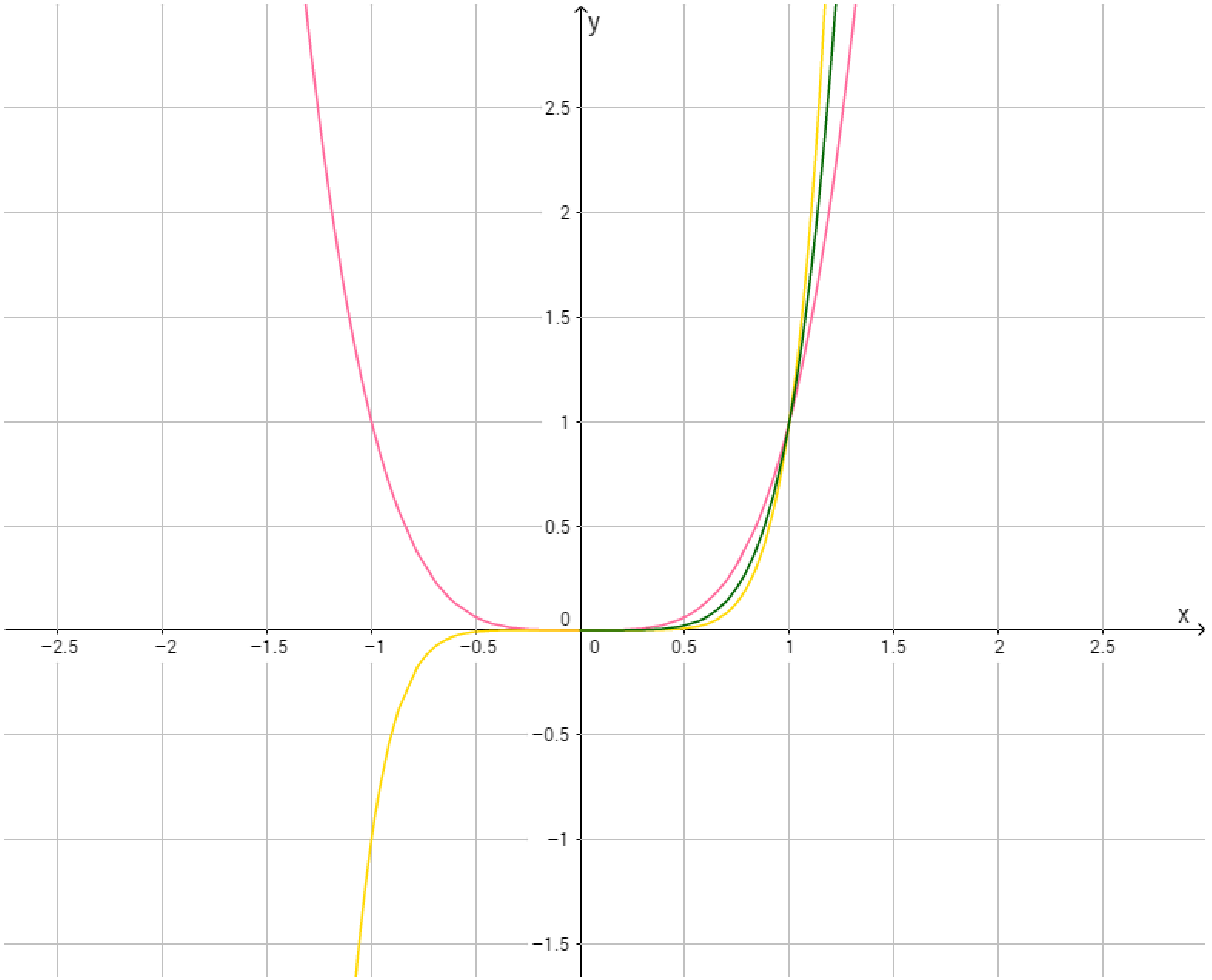
$n = 2k + 1$

$y = x^7$ - нечётная

$n = r > 1$

$y = x^{\frac{11}{2}}$

$D(f) = [0; +\infty)$

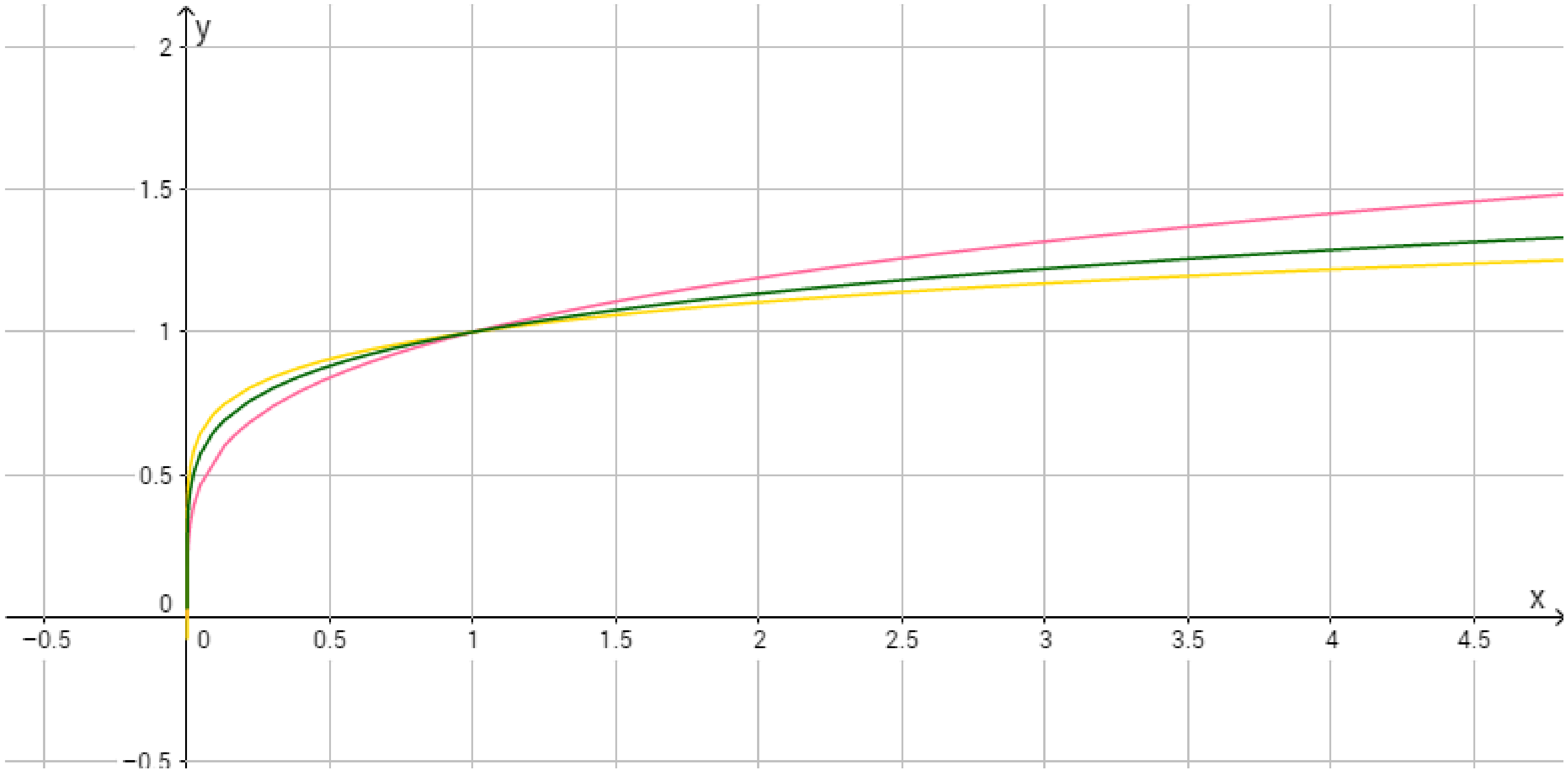


Степенная функция вида $y = x^n, 0 < n < 1,\ n \in \mathbb{Q}$

$y = x^{\frac{1}{4}}$
$D(f) = [0; +\infty)$

$y = x^{\frac{1}{7}}$
$D(f) = [0; +\infty)$

$y = x^{\frac{2}{11}}$
$D(f) = [0; +\infty)$



Функция $y = \sqrt[n]{x}$

$y = \sqrt{x}$

$D(f) = [0; +\infty)$

$y = \sqrt[3]{x}$ - нечётная

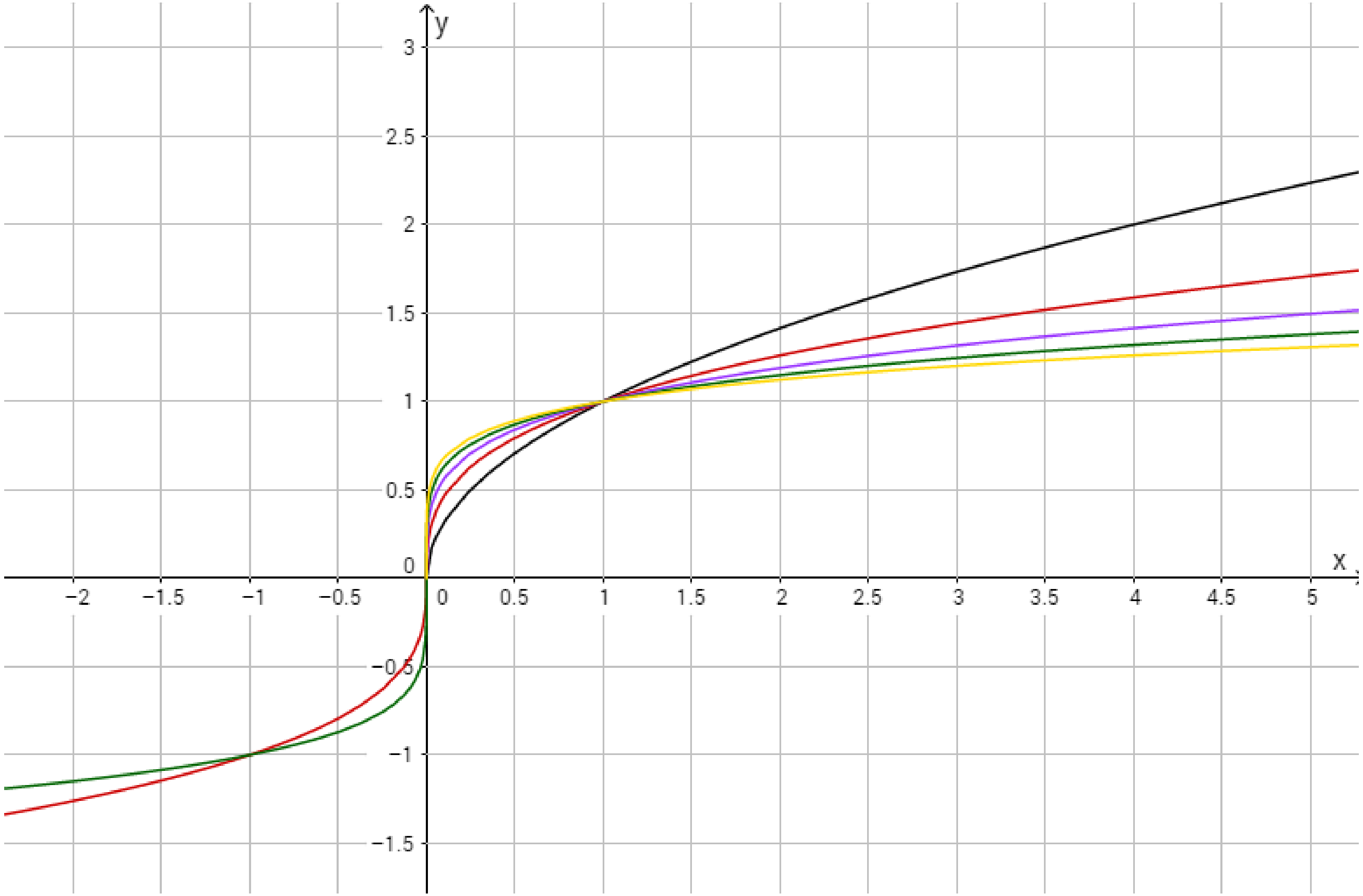
$y = \sqrt[4]{x}$

$D(f) = [0; +\infty)$

$y = \sqrt[5]{x}$ - нечётная

$y = \sqrt[6]{x}$

$D(f) = [0; +\infty)$



Степенная функция $y = x^n, n < 0,\ n \in \mathbb{Q}$

$n = 2k$

$y = x^{-4}$- чётная

$n = 2k + 1$

$y = x^{-7}$- нечётная

$|n| = r > 1$

$y = x^{-\frac{11}{2}}$

$D(f) = (0; +\infty)$

Степенная функция вида $y = x^n, n < 0,\ n \in \mathbb{Q}$

$y = x^{-4}$ - чётная

$y = x^{-7}$ - нечётная

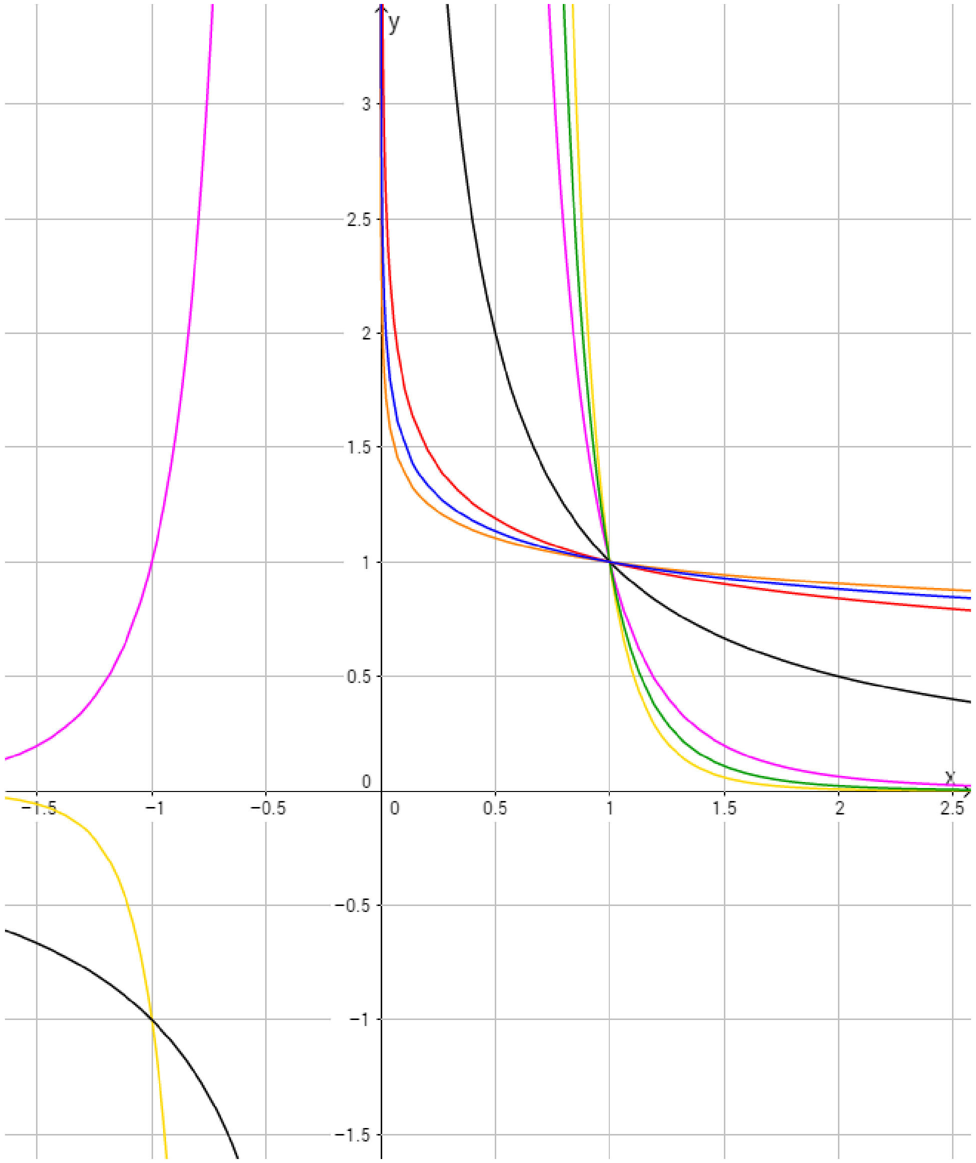
$y = x^{-\frac{11}{2}}$ $D(f) = (0; +\infty)$

$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ - нечётная

$y = x^{-\frac{1}{4}}$ $D(f) = (0; +\infty)$

$y = x^{-\frac{1}{7}}$ $D(f) = (0; +\infty)$

$y = x^{-\frac{2}{11}}$ $D(f) = (0; +\infty)$



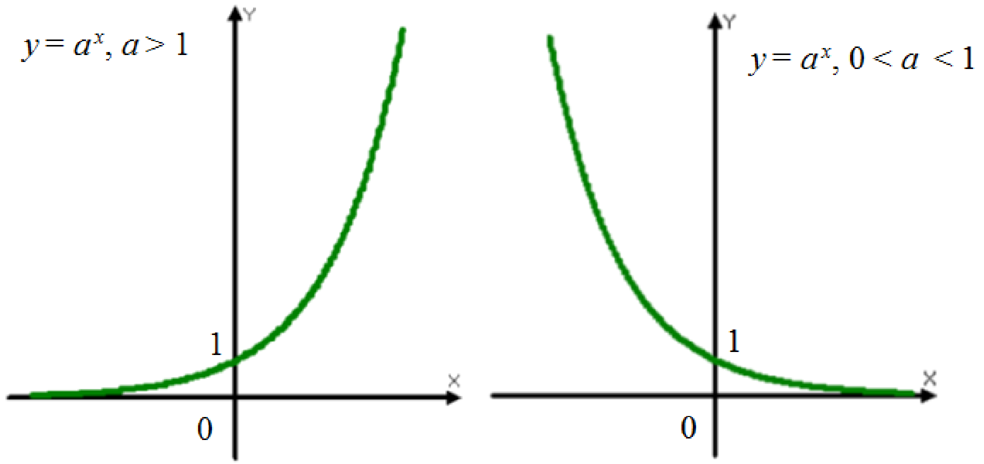
Показательная функция вида $\boldsymbol{y = a^x}$

<u>Опр.</u> Функция вида $f(x) = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$ называется <u>показательной функцией</u> с основанием a.

$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (0; +\infty)$

$f(x) \uparrow$ на $(-\infty; +\infty)$ при $a > 1$

$f(x) \downarrow$ на $(-\infty; +\infty)$ при $0 < a < 1$



Ось Ox – горизонтальная асимптота

при $x \to -\infty$ (если $a > 1$) и при $x \to +\infty$ (если $0 < a < 1$)

<u>Важное свойство</u>: $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$

Применение показательного закона

Процессы органического роста и убывания (отношение значений исследуемой величины в моменты времени $t + T$ и t не зависит от переменной t)

$$\frac{f(t+T)}{f(t)} = k(T) = \frac{f(T)}{f(0)} \Rightarrow f(t+T) = \frac{f(t)f(T)}{f(0)}$$

Примеры математических моделей:

- банковские проценты (сложные проценты)
- количество (масса) бактерий (процесс органического роста)
- радиоактивный распад
- изменение атмосферного давления в зависимости от высоты

Применение показательного закона

1) Радиоактивный распад вещества задается формулой $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где $m(t)$ и m_0 — масса радиоактивного вещества соответственно в момент времени t и в начальный момент времени $t = 0$; T — период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшится вдвое).

2) Количество бактерий $N(t)$ в определенной среде за время t вычисляется по формуле $N(t) = N_0 a^{kt}$, где N_0 — начальное количество бактерий, a и k — некоторые постоянные.

3) Изменение атмосферного давления p в зависимости от высоты h над уровнем моря описывается формулой $p(h) = p_0 a^h$, где p_0 — атмосферное давление над уровнем моря, a — некоторая постоянная.

Гиперболические функции

Гиперболический косинус $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

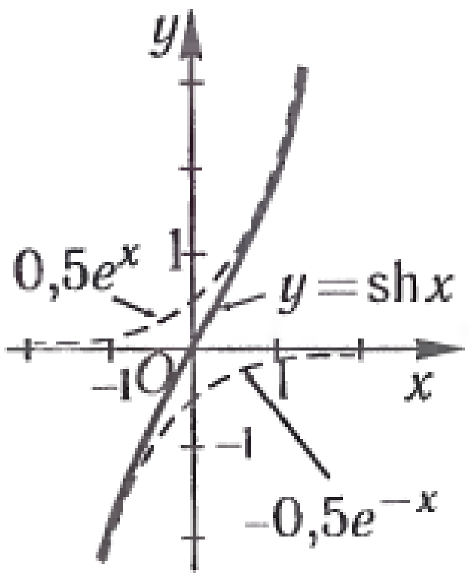
Гиперболический синус $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

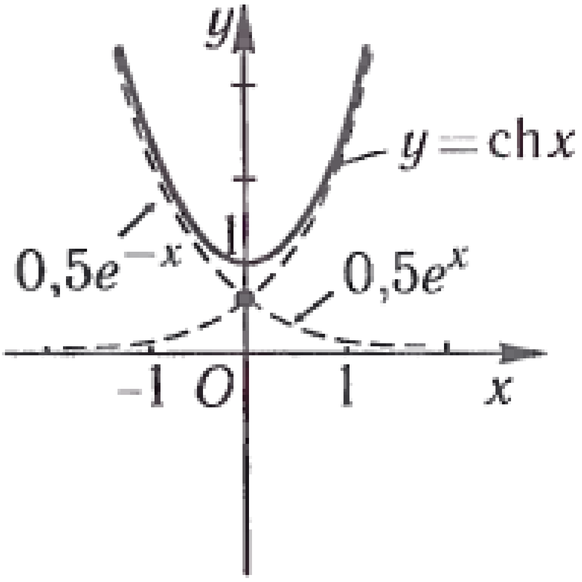
$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

$\operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$

$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$





Связь степени, корня и логарифма

Соотношение	Известно	Находим	Запись	Понятие
$2^3 = 8$	2 и 3	8	$8 = 2^3$	степень
	8 и 3	2	$2 = \sqrt[3]{8}$	корень
	8 и 2	3	$3 = \log_2 8$	логарифм

Понятие логарифма

Опр. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Логарифмом положительного числа b по основанию a называется такая степень, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

$$\boxed{\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b}$$

Основное логарифмическое тождество: $\boxed{a^{\log_a b} = b}$

Примеры: $\log_3 81 = 4$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2}$$

$$\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$$

$$\log_{17} 1 = 0$$

Примеры

1. $\log_2 8 = 3$, $2^3 = 8$;
2. $\log_3 729 = 6$, $3^6 = 729$;
3. $\log_{0,2} 25 = -2$, $(0,2)^{-2} = 25$;
4. $\log_4 8 = 1,5$, $4^{1,5} = 8$;
5. $\log_2 2 = 1$, $2^1 = 2$;
6. $\log_{10} 1 = 0$, $10^0 = 1$;
7. $\log_{49} 1/7 = -0,5$, $49^{-0,5} = 1/7$;
8. $\log_{0,1} 10000 = -4$, $0,1^{-4} = 10000$.

Базовые обозначения, утверждения, формулы

<u>Опр.</u> <u>Десятичный логарифм</u> $\log_{10} b = \lg b$

<u>Опр.</u> <u>Натуральный логарифм</u> $\log_e b = \ln b$

$$e \approx 2{,}718281828459045\ldots$$

<u>Опр.</u> <u>Двоичный логарифм</u> $\log_2 b = \operatorname{lb} b$

<u>Утв.</u> Существует логарифм любого положительного числа по любому положительному основанию, не равному 1.

<u>Утв.</u> Если логарифмы по одному и тому же основанию от чисел равны, то сами числа равны.

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a \frac{1}{a} = -1$$

$$\log_{a^n} a = \frac{1}{n} \qquad \log_a a^n = n$$

Свойства логарифмов

Пусть $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ n \neq 0,\ a, b, c, n \in \mathbb{R}$

1. $\boxed{\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c}$

<u>Доказательство:</u> $a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc$

2. $\boxed{\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$

3. $\boxed{\log_a b^n = n \log_a b}$

4. $\boxed{\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b}$

<u>Доказательство:</u> $(a^n)^{\frac{1}{n}\log_a b} = a^{n \cdot \frac{1}{n}\log_a b} = a^{\log_a b} = b$

Обобщенные формулы логарифмирования

Пусть $a > 0,\ a \neq 1, a, b, c \in \mathbb{R}$

1. $\boxed{\log_a(bc) = \log_a|b| + \log_a|c|}$ при $bc > 0$

2. $\boxed{\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a|b| - \log_a|c|}$ при $\frac{b}{c} > 0$

3. $\boxed{\log_a b^{2n} = 2n\log_a|b|}$ при $n \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

Формула перехода к другому (новому) основанию

Пусть $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1,\ a, b, c \in \mathbb{R}$

1. $\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$

<u>Доказательство:</u> прологарифмируем основное логарифмическое

тождество по основанию c: $\log_c\left(a^{\log_a b}\right) = \log_c b$

Из (3) $\Rightarrow$ $\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$

$$\boxed{\log_c b = \log_c a \cdot \log_a b}$$

Формулы-следствия

Пусть $a > 0,\ a \neq 1, n \neq 0, a, b, n \in \mathbb{R}$

1. $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$ при $b > 0, b \neq 1$

2. $\boxed{\log_a b = \log_{a^n} b^n}$ при $b > 0$

3. $\boxed{\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b}$ при $b > 0$

4. $\boxed{\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}}$

5. $\boxed{\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d}$ $b > 0, c > 0,\ c \neq 1, d > 0, c, d \in \mathbb{R}$

6. $\boxed{a^{\log_c b} = b^{\log_c a}}$ $c > 0,\ c \neq 1,\ b > 0$

Логарифмическая функция

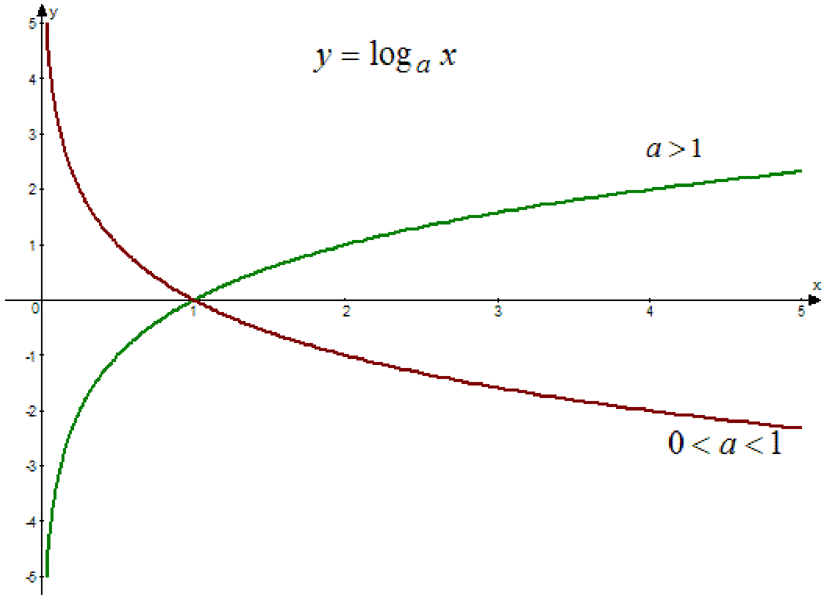
<u>Опр.</u> Функция вида $f(x) = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$ называется <u>логарифмической функцией</u> с основанием a.

$D(f) = (0; +\infty), E(f) = \mathbb{R}$

$f(x) \uparrow$ на $(0; +\infty)$ при $a > 1$

$f(x) \downarrow$ на $(0; +\infty)$ при $0 < a < 1$

Ось Oy – вертикальная асимптота при $x \to 0$



<u>Утв.</u> Показательная и логарифмическая функции с основанием a являются взаимно-обратными.

Функция $y = \log_a x$

$y = \log_2 x$

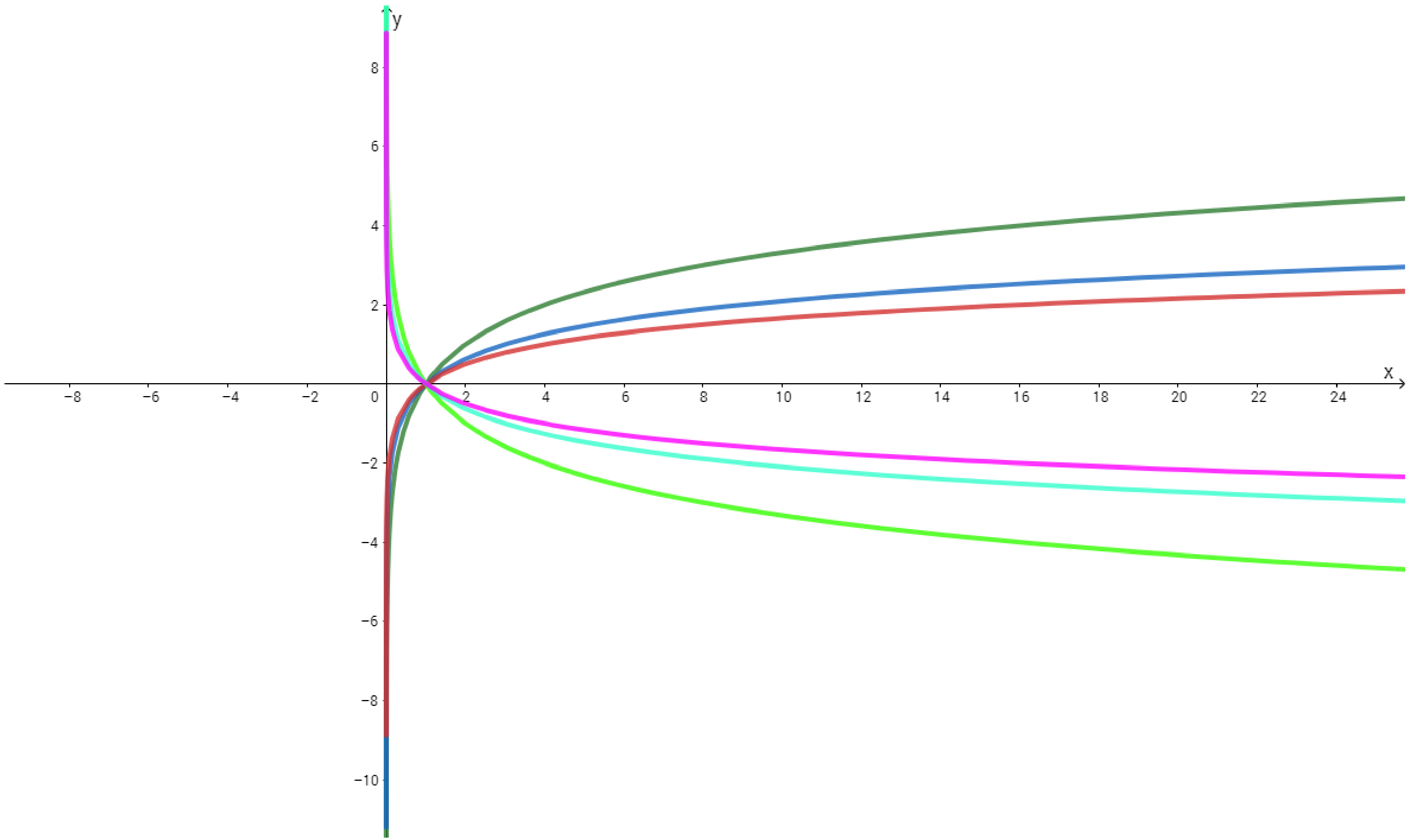
$y = \log_3 x$

$y = \log_4 x$

$y = \log_{\frac{1}{4}} x$

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$



Действия с логарифмами. Пример 1

Вычислить

$$\log_{25} 2{,}25 + \log_5 \frac{2}{3} =$$

$$= \log_{5^2} 1{,}5^2 + \log_5 \frac{2}{3} =$$

$$= \log_5 1{,}5 + \log_5 \frac{2}{3} =$$

$$= \log_5 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = \log_5 1 = 0$$

Действия с логарифмами. Пример 2

Вычислить

$$81^{\frac{1}{\log_7 3}} =$$

$$= 3^{4\log_3 7} =$$

$$= 7^4 =$$

$$= 2401$$

Действия с логарифмами. Пример 3

Избавиться от знака логарифма в записи числа

$$8^{\log_4 3 - \log_{16} 7} =$$

$$= \frac{8^{\log_{2^2} 3}}{8^{\log_{2^4} 7}} =$$

$$= \frac{2^{\frac{3}{2}\log_2 3}}{2^{\frac{3}{4}\log_2 7}} =$$

$$= \frac{3^{\frac{3}{2}}}{7^{\frac{3}{4}}}$$

Действия с логарифмами. Пример 4

Вычислить:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 8 =$$

$$= \log_2 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 8 =$$

$$= \log_2 5 \cdot \log_5 8 =$$

$$= \log_2 8 =$$

$$= 3$$

Действия с логарифмами. Пример 5

Упростить:

$$a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} =$$

$$= a^{\log_a(\lg a)} =$$

$$= \lg a$$

Действия с логарифмами. Пример 6

Вычислить

$$5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}+\frac{1}{2}\log_5 4} =$$

$$= 5^{\log_5\left(\sqrt{3}\right)^4 + \log_5 \sqrt{4}} =$$

$$= 5^{\log_5 9\cdot2} =$$

$$= 18$$

Процесс логарифмирования

Логарифмирование – это взятие логарифма от некоторого выражения.

Пример 1: прологарифмировать по основанию a выражение $A = \frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}}$

$$\log_a A = \log_a 27 + 2 - \frac{1}{5}\log_a b$$

Что можно сказать о знаке выражения и о знаках переменных?

$a > 0, a \neq 1$ и $b > 0$ (чтобы $\frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}} > 0$)

Процесс логарифмирования

Пример 2: прологарифмировать по основанию 3 выражение $A = \frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}}$

Что можно сказать о знаке выражения и о знаках переменных?

$b > 0$ (чтобы $\frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}} > 0$)

$$\log_3 A = 3 + 2\log_3 |a| - \frac{1}{5}\log_3 b$$

Логарифмирование

Прологарифмировать по основанию 10 выражение $\frac{ab^3}{c^2}$.

<u>Вопросы:</u>

Что можно сказать о знаке выражения и о знаке каждой переменной?

Должно быть $\frac{ab^3}{c^2} > 0$

$$\lg\frac{ab^3}{c^2} = \lg|a| + 3\lg|b| - 2\lg|c|,\ \ ab > 0$$

Логарифмирование

<u>Пример:</u> прологарифмировать по основанию a выражение

$$A = \sqrt[5]{\frac{(x^2+1)^4(y^4+1)^7}{(x^2+y^2)^6}} \cdot a^{2\,\mathrm{tg}\,x} \cdot \sqrt[4]{a}$$

$$\log_a A = \frac{4}{5}\log_a(x^2+1) + \frac{7}{5}\log_a(y^4+1) - \frac{6}{5}\log_a(x^2+y^2) + 2\,\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{4}$$

Процесс потенцирования

Потенцирование – нахождение выражения по его логарифму.

Пример 1: найти выражение, десятичным логарифмом которого является $\lg B = \lg 5 - 2\lg 3 + 3\lg 2$

$\lg B = \lg \frac{5 \cdot 2^3}{3^2}$

$B = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$

Пример 2: найти выражение, логарифмом которого по основанию a является $\log_a B = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a d$

$\log_a B = \log_a \frac{\sqrt{b}c^5}{d}$

$B = \frac{\sqrt{b}c^5}{d}$, $c > 0,\ d > 0$ (информация про знак b по-прежнему содержится)

Процесс потенцирования

Пример: найти выражение, логарифмом которого по основанию a является

$$\log_a B = \frac{6}{7}\log_a(x^4 + 2y^2 - 1) - \frac{3}{7}\cos 5x - \frac{2}{7}\log_a(x + 6y^2)$$

$$\log_a B = \log_a(x^4 + 2y^2 - 1)^{\frac{6}{7}} - \log_a a^{\frac{3}{7}\cos 5x} - \log_a (x + 6y^2)^{\frac{2}{7}} =$$

$$= \log_a \frac{(x^4+2y^2-1)^{\frac{6}{7}}}{a^{\frac{3}{7}\cos 5x}(x+6y^2)^{\frac{2}{7}}}$$

$B = \sqrt[7]{\frac{(x^4+2y^2-1)^6}{a^{3\cos 5x}(x+6y^2)^2}}$ (НО: надо уточнять знаки) или $B = \frac{(x^4+2y^2-1)^{\frac{6}{7}}}{a^{\frac{3}{7}\cos 5x}(x+6y^2)^{\frac{2}{7}}}$

Действия с логарифмами. Пример 7

Пусть $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$. Выразить через a и b число $\log_6 \frac{25}{72}$

$$\log_6 \frac{25}{72} = \log_6 25 - \log_6 72 =$$

$$= 2\log_6 5 - \log_6 36 - \log_6 2 =$$

$$= 2\frac{\lg 5}{\lg 6} - 2 - \frac{\lg 2}{\lg 6} =$$

$$= 2\frac{\lg 10 - \lg 2}{\lg 2 + \lg 3} - 2 - \frac{\lg 2}{\lg 2 + \lg 3} =$$

$$= \frac{2-3a}{a+b} - 2 = \frac{2-5a-2b}{a+b}$$

Действия с логарифмами. Пример 8

Вычислить $$\frac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409}\left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25} 7}}-125^{\log_{25} 6}\right) =$$

$$= \frac{9^{2\log_9 5}+3^{3\log_3 \sqrt{6}}}{409}\left(7^{2\log_7 5} - 5^{\frac{3}{2}\log_5 6}\right) =$$

$$= \frac{25+6^{\frac{3}{2}}}{409}\left(25 - 6^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{625-216}{409} = 1$$

Действия с логарифмами. Пример 9

Вычислить

$$5^{\log_{0,2} 0,5} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \log_{0,5} \frac{1}{10+2\sqrt{21}} =$$

$$= 5^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}} + \log_2 \frac{16}{10+2\sqrt{21}} + \log_2\left(10+2\sqrt{21}\right) =$$

$$= 5^{\log_5 2} + \log_2 16 - \log_2\left(10+2\sqrt{21}\right) + \log_2\left(10+2\sqrt{21}\right) =$$

$$= 2 + 4 = 6$$

Действия с логарифмами. Пример 10

Вычислить

$$\frac{\log_3 135}{\log_{45} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{1215} 3} =$$

$$= \log_3(5 \cdot 3^3) \cdot \log_3(5 \cdot 3^2) - \log_3 5 \cdot \log_3(5 \cdot 3^5) =$$

$$= (\log_3 5 + 3)(\log_3 5 + 2) - \log_3 5\,(\log_3 5 + 5) =$$

$$= 6$$

Действия с логарифмами. Пример 11

Упростить $\frac{\log_a b+\log_a(b^{\frac{1}{2}\log_b a^2})}{\log_a b-\log_{ab} b}\cdot\frac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b \log_a b}{}_{-1}}=$

$$=\frac{\log_a b+1}{\log_a b-\frac{\log_a b}{\log_a ab}}\cdot\frac{\frac{\log_a b\cdot\log_a b}{\log_a ab}}{\log^2{}_a b-1}=$$

$$=\frac{\log_a b}{(\log_a ab-1)(\log_a b-1)}=$$

$$=\frac{\log_a b}{(1+\log_a b-1)(\log_a b-1)}=$$

$$=\frac{1}{\log_a b-1}=\frac{1}{\log_a\frac{b}{a}}=\log_{\frac{b}{a}} a$$

Действия с логарифмами. Пример 12. I способ

Выразить $\log_{y\sqrt{x}}(x\sqrt{y})$ через $a = \log_{xy^2} x$

ОДЗ: $x > 0, y > 0$ и нельзя, чтобы одновременно $x = 1$ и $y = 1$

$y\sqrt{x} \neq 1$ и $xy^2 \neq 1$

I. Рассмотрим $x = 1 \Rightarrow y \neq 1$ при этом $\log_{y\sqrt{x}}(x\sqrt{y}) =$

$= \log_y(\sqrt{y}) = \frac{1}{2}$

II. Рассмотрим $x \neq 1 \Rightarrow a \neq 0$

$$a = \log_{xy^2} x = \frac{\log_x x}{\log_x xy^2} = \frac{1}{1+2\log_x y} \Rightarrow \log_x y = \frac{1-a}{2a}$$

$$\log_{y\sqrt{x}}(x\sqrt{y}) = \frac{\log_x(x\sqrt{y})}{\log_x(y\sqrt{x})} = \frac{1+\frac{1}{2}\log_x y}{\log_x y+\frac{1}{2}} = \frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-a}{2a}}{\frac{1-a}{2a}+\frac{1}{2}} = \frac{3a+1}{2}$$

Действия с логарифмами. Пример 12. II способ

Выразить $\log_{y\sqrt{x}}(x\sqrt{y})$ через $a = \log_{xy^2} x$

ОДЗ: $x > 0, y > 0$ и нельзя, чтобы одновременно $x = 1$ и $y = 1$

$y\sqrt{x} \neq 1$ и $xy^2 \neq 1$

$a = \log_{xy^2} x = \frac{1}{2}\log_{y\sqrt{x}} x$

$2a - 2 = \log_{y\sqrt{x}} x - 2 = \log_{y\sqrt{x}} x - 2\log_{y\sqrt{x}} y\sqrt{x} =$

$= \log_{y\sqrt{x}} \frac{x}{y^2 x} = -\log_{y\sqrt{x}} y^2$

$1 - a = \log_{y\sqrt{x}} y \qquad \frac{1-a}{2} = \log_{y\sqrt{x}}\sqrt{y}$

$\log_{y\sqrt{x}}(x\sqrt{y}) = \log_{y\sqrt{x}} x + \log_{y\sqrt{x}}\sqrt{y} = 2a + \frac{1-a}{2} = \frac{3a+1}{2}$

Степенная функция. ОДЗ

Найдите область определения функции:

$$f(x) = (3x+1)^{\sqrt{2}} - (2-x)^{\cos 2}$$

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 & (\text{т. к.} \sqrt{2} > 0) \\ 2-x > 0 & (\text{т. к.} \cos 2 < 0) \end{cases}$$

Ответ: $D(f) = \left[-\frac{1}{3}; 2\right)$

Композиция функций. Область значений

Найдите множество значений функции:

$$f(x) = 5^{\frac{1}{x^2}}$$

$$E\left(\frac{1}{x^2}\right) = (0; +\infty)$$

$$E(f) = (1; +\infty)$$

Ответ: $E(f) = (1; +\infty)$

Композиция функций. Область значений

Найдите множество значений функции:

$$f(x) = \frac{64^{\cos x}}{256^{\sin x}}$$

$$f(x) = \frac{64^{\cos x}}{256^{\sin x}} = \frac{2^{6\cdot\cos x}}{2^{8\cdot\sin x}} = 2^{6\cos x - 8\sin x} =$$

$$= 2^{10\left(\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x\right)} = 2^{10\sin(x+\varphi)}$$

$$E(f) = \left[\frac{1}{1024}; 1024\right]$$

Ответ: $E(f) = \left[\frac{1}{1024}; 1024\right]$