Тригонометрические функции и их свойства

План исследования функции $\boldsymbol{y = f(x)}$

1) Область определения (ОДЗ) $D(f)$
2) Область значений (область изменения) $E(f)$

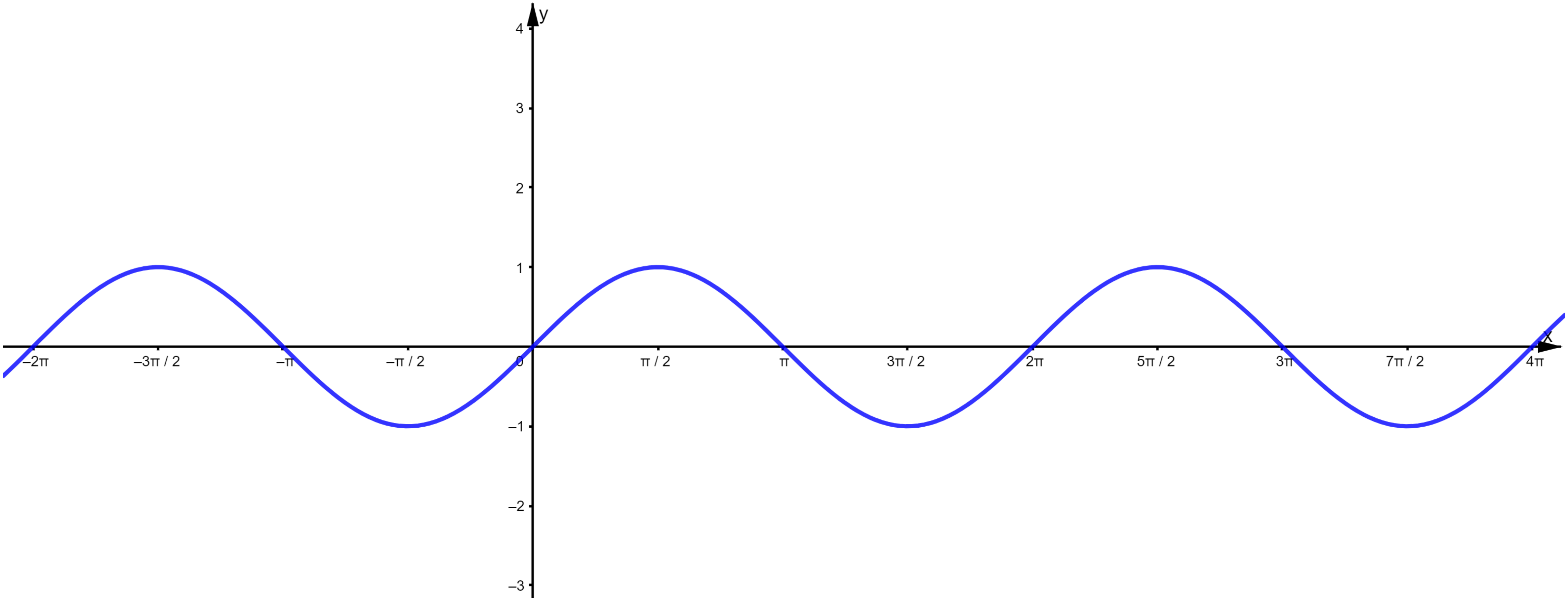
   Вывод: ограниченная / ограниченная сверху /

   ограниченная снизу / неограниченная
3) Чётная / нечётная / общего вида
4) Наличие симметрии (следствие из п.3 симметрия относительно начала координат / относительно оси Oy, а также другая симметрия, если есть)
5) Периодическая (указать основной период) / непериодическая
6) Точки разрыва (указать какого рода) и промежутки непрерывности

План исследования функции $\boldsymbol{y = f(x)}$

7) Нули функции (корни) и промежутки знакопостоянства
8) Точки локального экстремума (минимум / максимум) и исследование на монотонность (промежутки возрастания / убывания) - исследование с помощью первой производной
9) Точки перегиба, промежутки выпуклости вверх / вниз - исследование с помощью второй производной
10) Наличие асимптот (вертикальные / горизонтальные / наклонные) – исследование с помощью понятия предела
11) Вспомогательные точки (точка пересечения с осью Oy и др.)
12) Построение эскиза графика функции

График функции $y = \sin x$



Замечания

- График функции $y = \sin x$ называется **<u>синусоидой</u>**.
- В клетчатой тетради для минимального искажения графика тригонометрических функций удобно использовать следующий масштаб:

  по оси Ox 3 клетки соответствуют $\frac{\pi}{2}$

  по оси Oy 2 клетки соответствуют 1

Свойства функции $\boldsymbol{y = \sin x}$

1) $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$
2) $E(f) = [-1; 1]$, ограниченная функция
3) Нечётная: $\sin(-x) = -\sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$
4) График симметричен относительно начала координат

   Замечание: вообще говоря, $x = \frac{\pi}{2}$ - тоже ось симметрии,

   т.к. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Какие есть еще оси симметрии?
5) Периодическая, основной период 2π

   $\sin(x + 2\pi) = \sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$ и меньшего периода нет

   (рассмотрим, например $\sin x = 1$)
6) Непрерывная

Свойства функции $\boldsymbol{y = \sin x}$

7) Нули функции $x_0 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Промежутки знакопостоянства:

$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$

$\sin x < 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$

или $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$

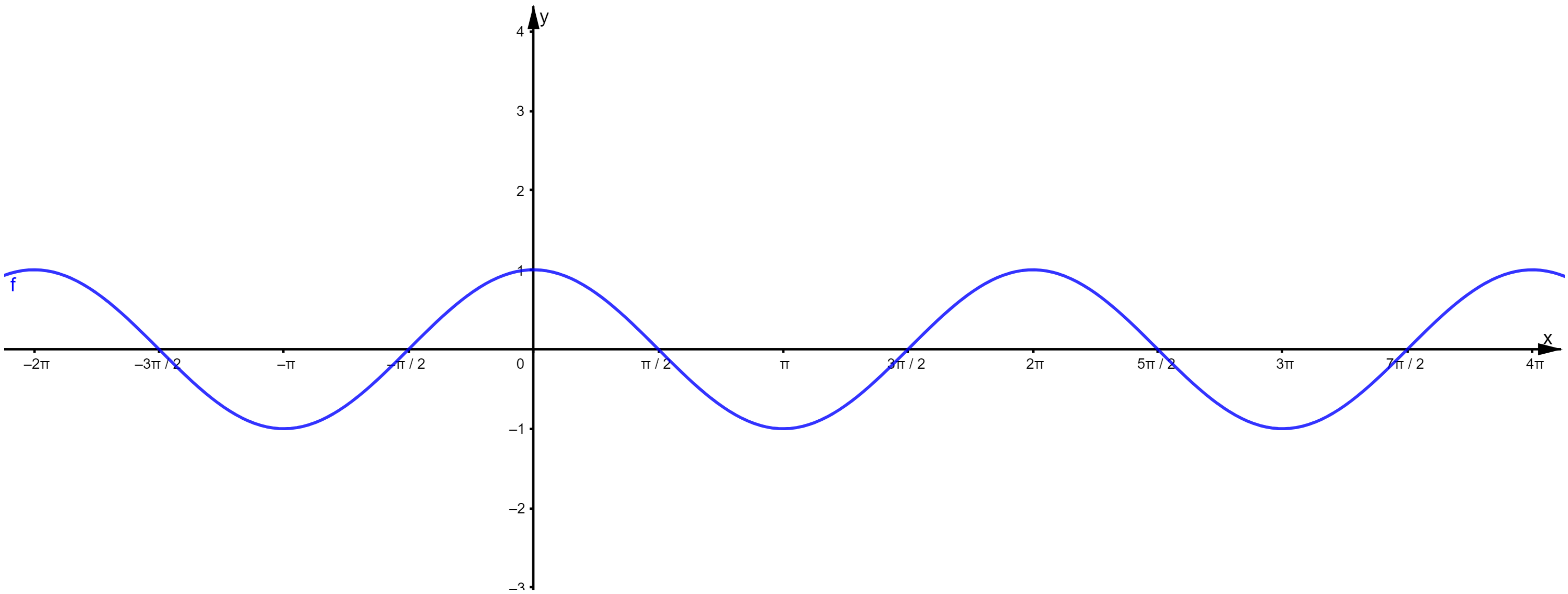
8) Точки локального минимума: $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Точки локального максимума: $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Монотонность: $y = \sin x$ $\uparrow$ на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

$y = \sin x$ $\downarrow$ на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

График функции $y = \cos x$



Свойства функции $\boldsymbol{y = \cos x}$

График функции $y = \cos x$ называется **косинусоидой**.

1) $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$
2) $E(f) = [-1; 1]$, ограниченная функция
3) Чётная: $\cos(-x) = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$
4) График симметричен относительно оси Oy
5) Периодическая, основной период 2π

   $\cos(x + 2\pi) = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$ и меньшего периода нет
6) Непрерывная

Свойства функции $\boldsymbol{y = \cos x}$

7) Нули функции $x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Промежутки знакопостоянства:

$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

$\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

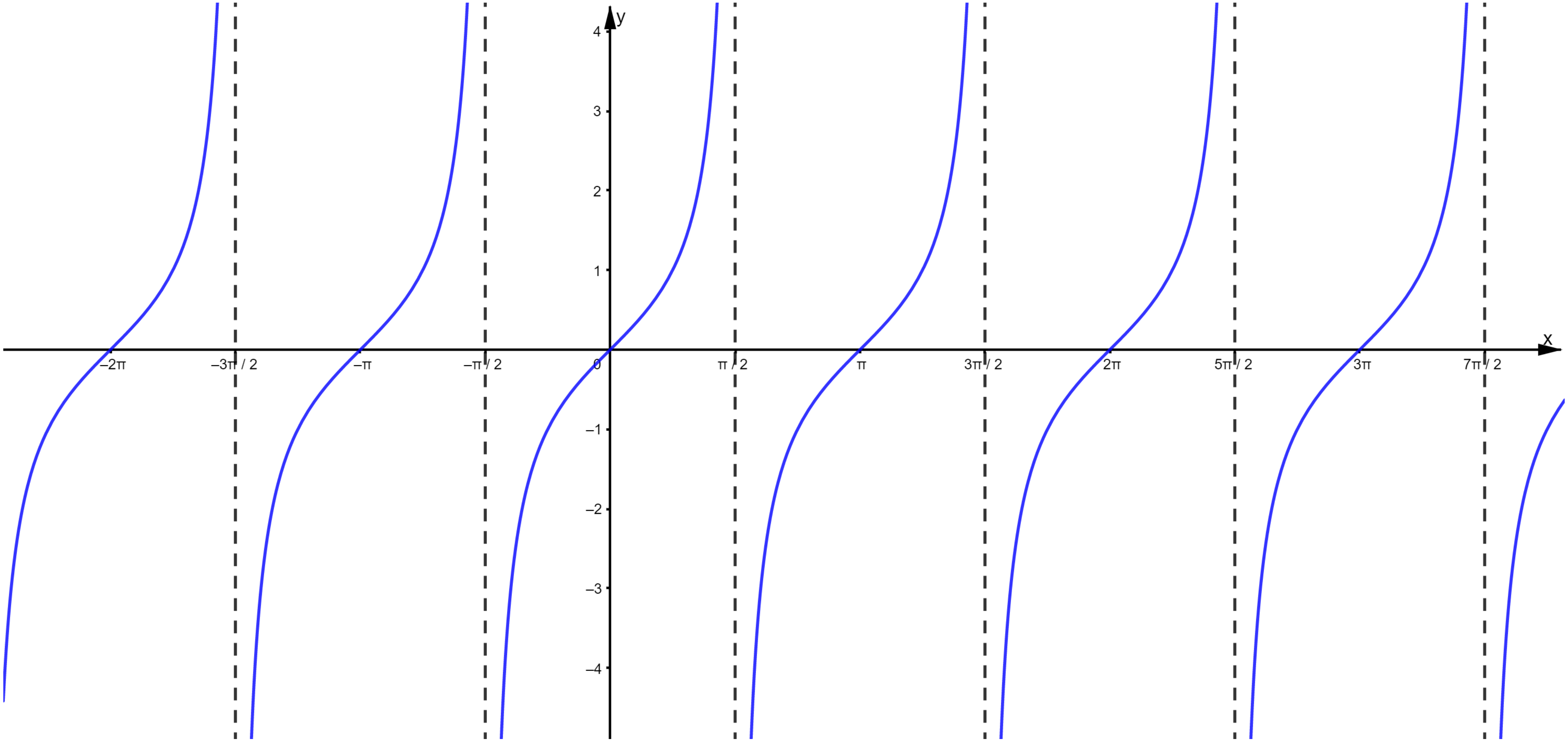
8) Точки локального минимума: $x_{min} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Точки локального максимума: $x_{max} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Монотонность: $y = \cos x$ $\uparrow$ на $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$

$y = \cos x$ $\downarrow$ на $[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$

График функции $y = \mathbf{tg}\, x$



Свойства функции $y = \mathbf{tg}\, x$

График функции $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ называется **тангенсоидой**.

1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
2) $E(f) = (-\infty; +\infty)$, неограниченная функция
3) Нечётная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x\ \ \forall x \in D(f)$
4) График симметричен относительно начала координат
5) Периодическая, основной период π

   $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x\ \ \forall x \in D(f)$ и меньшего периода нет
6) Точки разрыва $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

   Но говорят «непрерывная на своей области определения»

Свойства функции $\boldsymbol{y = \mathbf{tg}\, x}$

7) Нули функции $x_0 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Промежутки знакопостоянства:

$\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

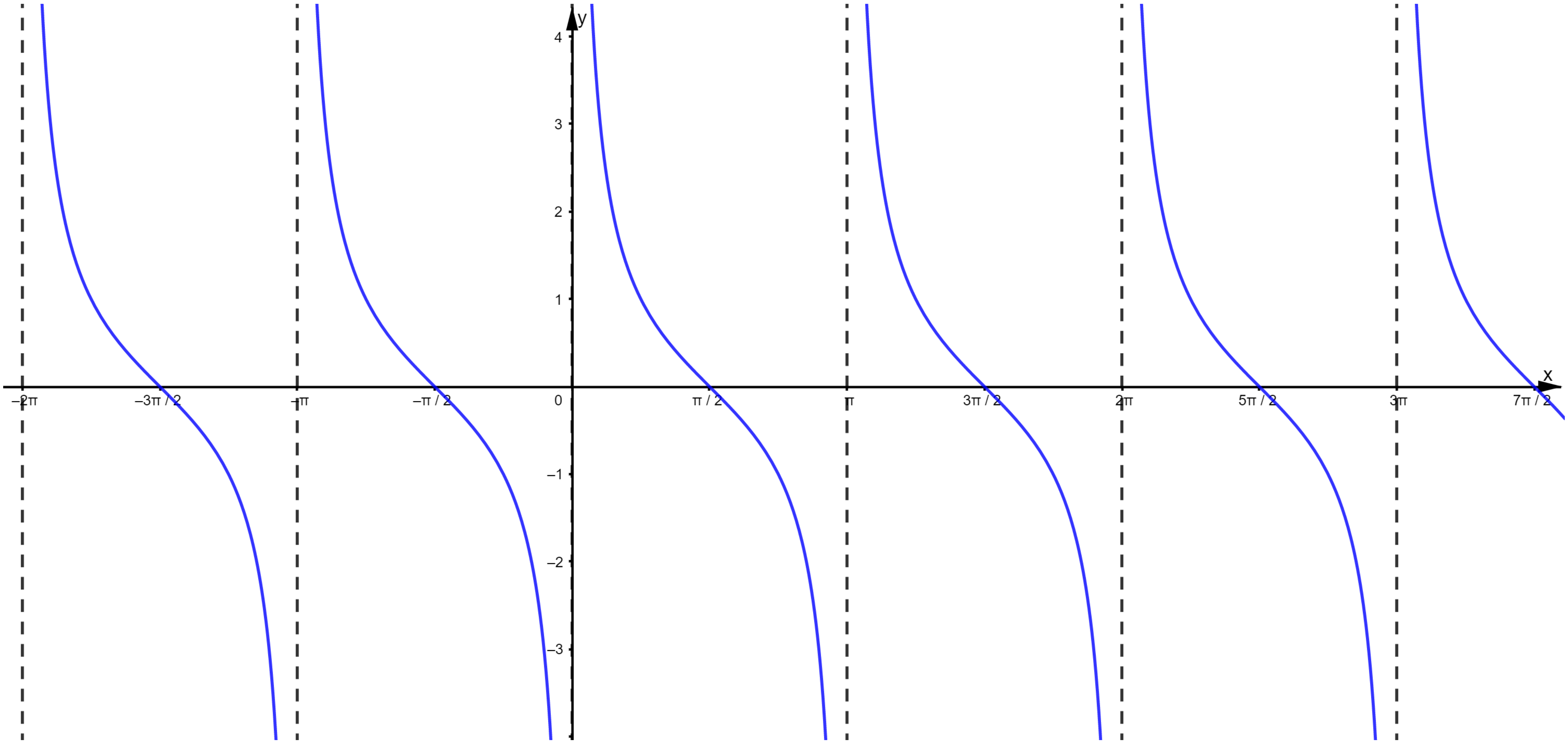
$\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

8) Локальных экстремумов нет

Монотонность:

$y = \operatorname{tg} x\ \uparrow$ на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

График функции $y = \mathbf{ctg}\,x$



Свойства функции $\boldsymbol{y = \operatorname{ctg} x}$

График функции $y = f(x) = \operatorname{ctg} x$ называется **котангенсоидой**.

1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\pi k; \pi + \pi k)$
2) $E(f) = (-\infty; +\infty)$, неограниченная функция
3) Нечётная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \ \forall x \in D(f)$
4) График симметричен относительно начала координат
5) Периодическая, основной период π

   $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x \ \forall x \in D(f)$ и меньшего периода нет
6) Точки разрыва $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

   Но говорят «непрерывная на своей области определения»

Свойства функции $\boldsymbol{y = \operatorname{ctg} x}$

7) Нули функции $x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

   Промежутки знакопостоянства:

   $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

   $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

8) Локальных экстремумов нет

   Монотонность:

   $y = \operatorname{ctg} x\ \downarrow$ на $(\pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$