АОУ Лицей НИП
г. Королев Московской области
учитель Волкова Ольга Ивановна

План-конспект открытого урока (семинар) по теме: «Тригонометрические уравнения. Методы их решения. Метод замены переменной» для учеников 10 класса

Основные цели:

1. Закрепить методы решения простейших тригонометрических уравнений
2. Сформулировать один из основных методов решения тригонометрических уравнений - метод замены переменной
3. Научить решать тригонометрические уравнения методом замены переменной
4. Заложить основы для классификации тригонометрических уравнений, что в дальнейшем позволит ученикам по виду тригонометрического уравнения определять наиболее эффективный способ его решения.
5. Способствовать развитию математического аппарата и мыслительных способностей каждого конкретного ученика

Формы, методы и педагогические приемы, которые используются учителем на уроке:

- Педагогическая технология на основе системы эффективных уроков (автор - А.А. Окунев). Создание и поддержание высокого уровня познавательного интереса и самостоятельной умственной активности учащихся. Данный урок - урок поиска рациональных решений. Установка не на запоминание, а на смысл, задача в центре содержания.
- Технология обучения математике на основе решения задач (автор - Р.Г. Хазанкин). Лекционно-семинарская система обучения (лекции - объяснение нового материала, семинары - решение задач)
- Дифференцированное обучение, групповые и индивидуальные формы (в зависимости от конкретного класса: возможно часть задач (более сложных) предложить только наиболее сильным ученикам)
- Использование исследовательского метода в обучении, направленного на развитие математического аппарата и мыслительных способностей каждого конкретного ученика
- Печатный материал - индивидуальный краткий конспект урока (основные понятия, формулы, утверждения, материал лекций сжато в виде схем или таблиц, список решаемых задач и домашнее задание)

План урока:

1. Организационный момент

Цель этапа: включить учащихся в учебную деятельность, определить содержательные рамки урока.

2. Актуализация знаний учащихся

Цель этапа: актуализировать знания учащихся по изученным ранее смежным темам (повторяем решение простейших тригонометрических уравнений) и решаем несколько «модифицированных» задач, требующих применения ранее изученного материала и аналитического подхода

3. Изучение новой темы

Цель этапа: сформулировать один из основных методов решения тригонометрических уравнений – метод замены переменной

4. Закрепление, решение задач

Цель этапа: тренировать навыки решения задач по теме «Тригонометрические уравнения. Методы их решения. Метод замены переменной»

5. Подведение итогов

Цель этапа: еще раз выделить ключевые моменты в материале, изученном на уроке.

6. Домашнее задание

Цель этапа: сформулировать домашнее задание для учащихся.

Конспект урока:

1. Организационный момент

Формулировка темы урока: «Тригонометрические уравнения. Методы их решения. Метод замены переменной».

2. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос - беседа. Повторение некоторых ранее изученных сведений из теории. Учащиеся (4 человека) записывают на доске формулы для решения простейших тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ и дают графическую интерпретацию для решения таких уравнений. Затем записывают вспомогательные формулы: связь обратных одноименных тригонометрических функций с противоположными по знаку аргументами. Остальные учащиеся в это время выполняют мини-тест по простейшим тригонометрическим уравнениям:

Вариант 1

1. $\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ $\quad (x = \frac{5\pi}{4} + 3\pi k,\ k \in \mathbb{Z})$
2. $\operatorname{tg}(3x) = \sqrt{3}$ $\quad (x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z})$

Вариант 2

1. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ $\quad (x = \frac{5\pi}{8} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z})$
2. $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ $\quad (x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z})$

Затем учащиеся решают три задачи продвинутого уровня (здесь требуется аналитический подход к решению задачи) по предыдущей теме:

1. $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$
   $3x - \frac{3\pi}{4} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
   $3x = \frac{13\pi}{12} + \pi k,$ $\quad$ Ответ: $x = \frac{13\pi}{36} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$
2. $(3\cos x + \pi)(4\cos x - \pi) = 0$
   $\left[\begin{array}{l} 3\cos x + \pi = 0 \\ 4\cos x - \pi = 0 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{\pi}{3} \notin [-1;1] \\ \cos x = \frac{\pi}{4} \in [-1;1] \end{array}\right.$ $\quad$ Ответ: $x = \pm \arccos\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
3. $2\sin x + 3\cos x = 0$
   $2\sin x = -3\cos x$, разделим на $2\cos x \neq 0$, тогда $\operatorname{tg} x = -1{,}5$
   Ответ: $x = \operatorname{arctg}(-1{,}5) + \pi k = -\operatorname{arctg}(1{,}5) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

   (*) Второй способ решения: применим формулу для суммы гармонических колебаний:
   $\begin{cases} \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$, угол лежит в первой четверти, уравнение принимает вид:
   $\sqrt{13}\sin\left(x + \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = 0$, тогда Ответ: $x = -\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
   Проверка: применяя формулы для обратных тригонометрических функций, убеждаемся, что ответы эквиваленты: $\operatorname{arctg}(-1{,}5) = -\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, т.к. обе функции нечетны, на своей области определения монотонны и
   $\sin(\operatorname{arctg}(-1{,}5)) = \frac{-1{,}5}{\sqrt{1+(1{,}5)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} = \sin\left(-\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right) = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

3. Изучение новой темы

Существуют различные методы решения тригонометрических уравнений. Сегодня мы будем рассматривать метод замены переменной, т.е. случай, когда уравнение имеет вид $f\big(T(x)\big)=0$, где $T(x)$ - некоторая тригонометрическая функция, а $f(t)$ – произвольная функция (чаще всего нам будет встречаться степенная функция, в частности - квадратичная). Для решения уравнений такого типа надо произвести замену переменной вида $t=T(x)$. Решить полученное алгебраическое уравнение относительно t . Учесть, какие значения может принимать эта переменная, рассматривая, какая именно тригонометрическая функция фигурирует в замене. Выполнить обратную замену переменной, решив полученное (-ые) в результате уравнение относительно неизвестной переменной x.

4. Закрепление, решение задач

Решить задачи (далее материал, помеченный звездочкой, предназначен для более продвинутых учащихся и более сильных групп):

1. $6\sin^2 x-5\sin x+1=0$ $\quad \sin x=t,\ -1\le t\le 1$, тогда $6t^2-5t+1=0$

$$\begin{cases} -1\le t\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2} \\ \sin x=\frac{1}{3} \end{array}\right. \qquad \underline{\text{Ответ}}: \left[\begin{array}{c} x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \\ x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

2. $2\cos^4 x-7\cos^2 x-4=0$ $\quad \cos^2 x=t,\ 0\le t\le 1,$ тогда $2t^2-7t-4=0$

$$\begin{cases} 0\le t\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2} \\ t=4 \end{array}\right. \end{cases}$$ $\underline{\text{Ответ}}$: корней нет

3. $\cos^2 x-\sin^2 x-\cos x=0$

$2\cos^2 x-\cos x-1=0$ $\quad \cos x=t,\ -1\le t\le 1,$ тогда $2t^2-t-1=0$

$$\begin{cases} -1\le t\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2} \\ t=1 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \cos x=-\frac{1}{2} \\ \cos x=1 \end{array}\right. \qquad \underline{\text{Ответ}}: \left[\begin{array}{c} x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k \\ x=2\pi k \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

4. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=4$

$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3=0$ $\quad \operatorname{tg}x=t \qquad t^2-4t+3=0$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1 \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=3 \end{array}\right. \qquad \underline{\text{Ответ}}: \left[\begin{array}{c} x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ x=2\operatorname{arctg}3+2\pi k \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

5. (*) $4\sin^3 x+\cos^2 x+3\sin x=2{,}75$

$16\sin^3 x-4\sin^2 x+12\sin x-7=0$

$\sin x=t,\ -1\le t\le 1,$ тогда $16t^3-4t^2+12t-7=0$

Решаем это уравнение, используя схему Горнера, путем подбора рациональных корней: по следствию из теоремы Безу корни данного уравнения или иррациональные, или принадлежат множеству $\left\{\pm1;\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{4};\pm\frac{1}{8};\pm\frac{1}{16};\pm7;\pm\frac{7}{2};\pm\frac{7}{4};\pm\frac{7}{8};\pm\frac{7}{16}\right\}$

	x^3	x^2	x^1	x^0	
	16	-4	12	-7	
1	16	12	24	$17\neq 0$	Не является решением
-1	16	-20	32	$-39\neq 0$	Не является решением
$\frac{1}{2}$	16	4	14	0	Является решением
	x^2	x^1	x^0		

В результате $\left(x-\frac{1}{2}\right)(16x^2+4x+14)=0$, уравнение $16x^2+4x+14$ не имеет корней, т.к. у него $D<0$

$$\begin{cases} -1\le t\le 1 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \sin x=\frac{1}{2} \qquad \underline{\text{Ответ}}: x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

5. Подведение итогов

Резюме: Теперь мы овладели одним из основных методов решения тригонометрических уравнений – методом замены переменной. В дальнейшем в зависимости от вида тригонометрического уравнения мы должны научиться понимать, какой способ решения будет в данном случае наиболее эффективным, а также правильно применять выбранный метод.

6. Домашнее задание

(В): гл.6 §5 п.4 читать, решить № 656 (п. 16-19), повторить материал лекций, решить задачи:

1. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ ($x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$)
2. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ ($x = \pi + 2\pi k, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$)
3. $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ ($x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$)

Список литературы:

1. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)» - М., Мнемозина, 2009 – 351 с.
2. Галицкий М.Л., Мошкович М.М., Шварцбурд С.И. «Углубленное изучение алгебры и математического анализа: Методические рекомендации и дидактические материалы: Пособие для учителя» - М., Просвещение, 1997 – 352 с.
3. Мордкович А.Г. Семенов П.В. «Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Часть 1 Учебник. 10 класс.» - М., Мнемозина, 2007 - 424 с.
4. Шахмейстер А.Х. «Тригонометрия» - СПб, Петроглиф, 2009 – 752 с.