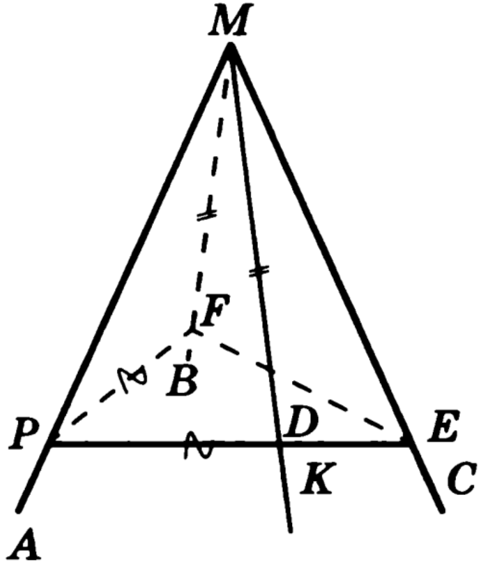
Многогранные углы

Теорема 1 (о сумме плоских углов трехгранного угла)

Теорема 1. В трёхгранном угле величина каждого плоского угла меньше суммы величин двух других его плоских углов.

Доказательство: пусть $\angle AMC = \gamma, \angle AMB = \alpha, \angle BMC = \beta$.



Пусть $\angle AMC$ – наибольший из плоских углов трёхгранного угла $\boldsymbol{M}ABC$.

MK: $MK \subset (AMC)$ и $\angle AMB = \angle AMK = \alpha$

$F \in MB$ и $D \in MK$: $MF = MD$

$\forall \delta$: $F \in \delta, D \in \delta$; $\delta \cap MA = P$ и $\delta \cap MC = E$

$\Delta PMF = \Delta PMD$ по I признаку $\Rightarrow PF = PD$

$PE = PD + DE = PF + DE$

по неравенству треугольника для ΔPFE: $PF + FE > PE = PF + DE \Rightarrow EF > DE$

$\gamma = \angle AMC = \angle PME = \angle PMD + \angle DME = \alpha + \angle DME$

Рассмотрим ΔFME и ΔDME : ME общая, $FM = MD$ и $FE > DE \Rightarrow \angle FME > \angle DME \Rightarrow$

$\gamma = \alpha + \angle DME < \alpha + \angle FME = \alpha + \beta$

ЧТД

Теорема 2 (о сумме плоских углов многогранного угла)

Теорема 2. Сумма величин всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $360°$.

Доказательство: Пусть $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$– сумма всех плоских углов многогранного угла $\boldsymbol{M}A_1A_2 \dots A_n$.

При каждой вершине A_i имеется 3 плоских угла, пусть α_{i1} и α_{i2} - углы в «боковой грани», β_i - угол в «основании».

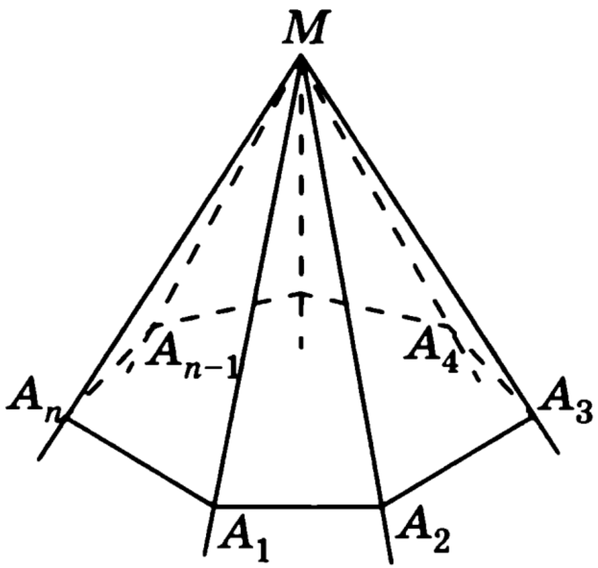
По теореме 1: $\beta_i < \alpha_{i1} + \alpha_{i2}$

$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 180°(n-2)$

$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i1} + \alpha_{i2}) + S = 180°n$

$180°(n-2) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i < \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i1} + \alpha_{i2}) = 180°n - S$

$S < 360°$



ЧТД

Напоминание. Теорема о трех косинусах

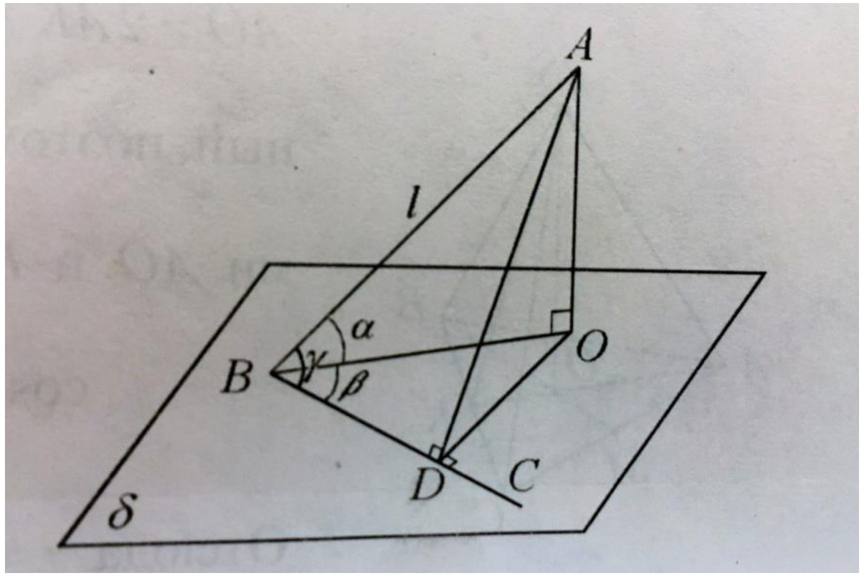
$\gamma = \angle(AB, BD)$ - угол между наклонной и заданной прямой

$\alpha = \angle(AB, BO)$ - угол между наклонной и ее проекцией

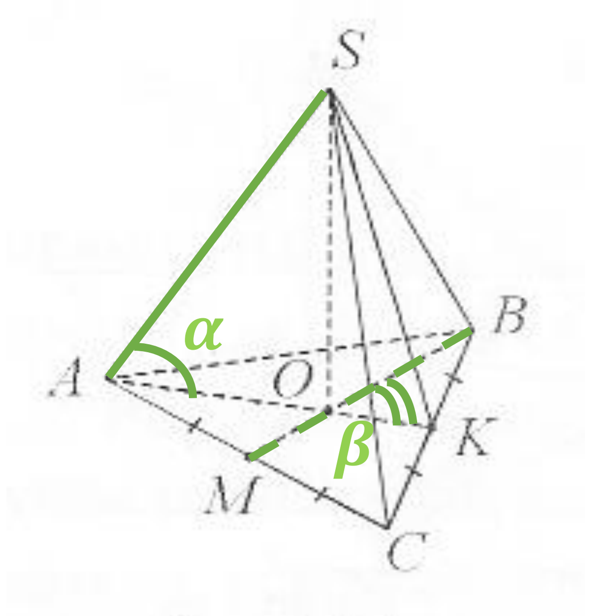
$\beta = \angle(BO, BD)$ - угол между проекцией наклонной и заданной прямой

$$\boxed{\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

Можно использовать для нахождения угла между скрещивающимися прямыми (важно удачно выбрать плоскость δ, чтобы углы α и β легко вычислялись)



Пример использования теоремы о трех косинусах



<u>Дано</u>: правильный тетраэдр $SABC$

<u>Найти</u>: косинус угла между боковым ребром и не пересекающей его медианой основания.

$\cos\angle(AS; BM) = ?$

<u>Решение</u>:

$\gamma = \angle(AS, BM)$ - угол между наклонной и заданной прямой

$\triangle ABC$ р/с, $SO \perp ABC$, O – центроид, $AO = \frac{2}{3}AK = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\alpha = \angle(AS, AO) = \angle SAO$ - угол между наклонной и ее проекцией

$\triangle ASO$: $\angle O = 90°, \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\beta = \angle(AO, BM) = \angle AOM = 60°$ - угол между проекцией наклонной и заданной прямой

$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Напоминание. Теорема о трех синусах

$\gamma = \angle(AD, \delta)$ - угол <u>между прямой</u> (наклонной, лежащей в плоскости одной из граней двугранного угла) и заданной <u>плоскостью</u> (второй гранью двугранного угла)

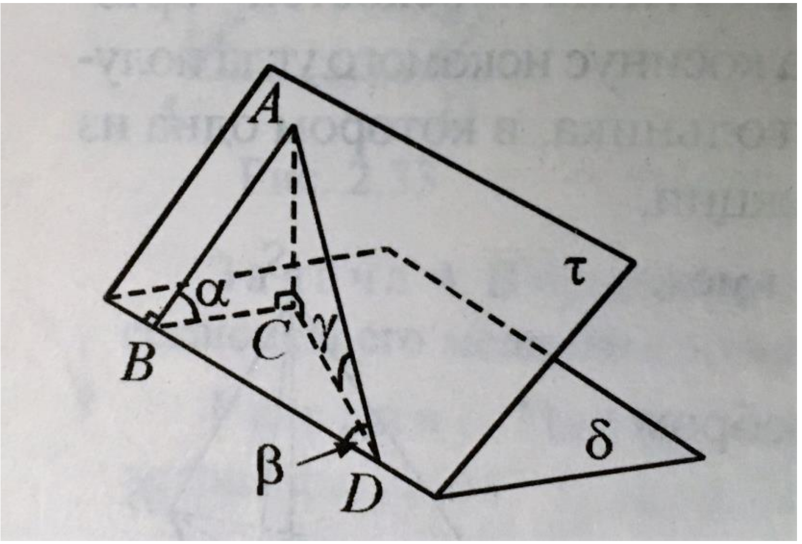
$\alpha = \angle(\tau\ , \delta)$ - угол <u>между плоскостями</u> (линейный угол двугранного угла)

$\beta = \angle(AD, BD)$ - угол <u>между прямыми</u> (наклонной и прямой пересечения плоскостей, т.е. между прямой и ребром двугранного угла)

$$\boxed{\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Можно использовать для нахождения угла

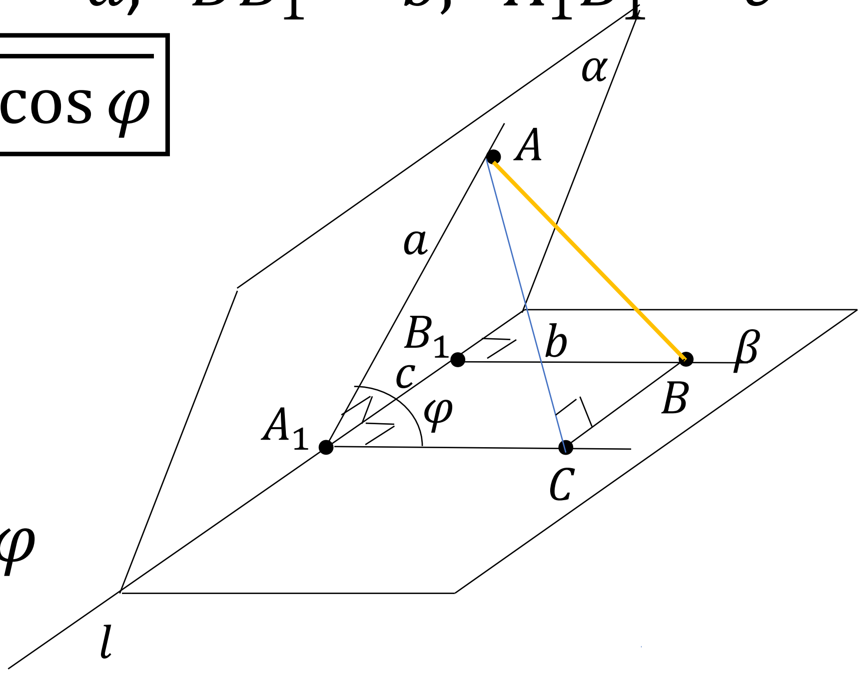
между прямой и плоскостью



Напоминание. Пространственная теорема косинусов для двугранного угла

Утв 1. На гранях двугранного угла величины φ взяты точки A и B, A_1 и B_1 - проекции этих точек на ребро двугранного угла. $AA_1 = a,\ \ BB_1 = b,\ \ A_1B_1 = c$

$$\Rightarrow \boxed{AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\varphi}}$$



Доказательство:

$A_1C \parallel BB_1, \quad A_1C = BB_1 = b$

$\Longrightarrow BC = A_1B_1 = c$

из $\varDelta\, AA_1C:\ \ AC^2 = {AA_1}^2 + {CA_1}^2 - 2\, AA_1 \cdot CA_1 \cos\varphi$

$AA_1C \perp l,\ \ l \parallel BC \ \Longrightarrow\ AC \perp BC$

$\Rightarrow$ из $\varDelta\, ACB \quad AB^2 = AC^2 + BC^2 = {AA_1}^2 + {CA_1}^2 - 2\, AA_1 \cdot CA_1 \cos\varphi + BC^2 =$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\varphi$

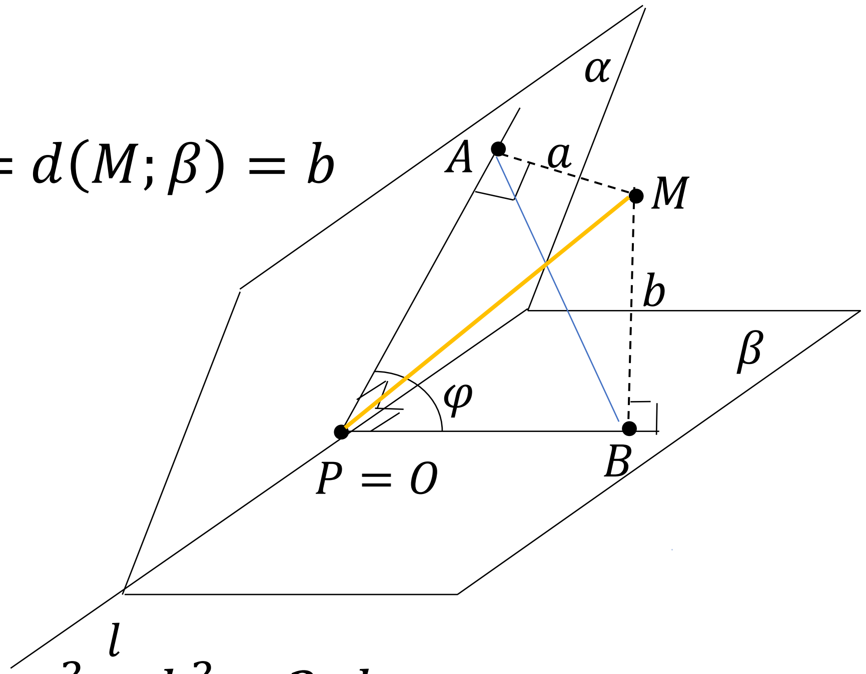
ЧТД

Напоминание. Расстояние от точки до ребра двугранного угла

Утв 2. Если внутри двугранного угла величины φ взята точка M на расстояниях a и b от граней двугранного угла, то ее расстояние до ребра двугранного угла равно

$$\alpha \cap \beta = l,\ \ d(M;\alpha) = a,\ \ d(M;\beta) = b$$

$$\Rightarrow d(M,l) = \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\varphi}}{\sin\varphi}.$$



Доказательство: $MA \perp \alpha,\ MA = d(M;\alpha) = a, MB \perp \beta,\ MA = d(M;\beta) = b$
$d(M,l) = MP \perp l$

$\underset{\text{ТТП}}{\Longrightarrow} AO \perp l,\ \ BO \perp l\ \Rightarrow\ P = O,\ OM$ – искомая величина

A, M, B, O лежат на одной окружности с диаметром OM

$$\underset{\text{T sin}}{\Longrightarrow}\ \ \frac{AB}{\sin\varphi} = 2R = d = OM$$

$$\measuredangle MAB \underset{\text{T cos}}{\Longrightarrow} AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM\cos(180° - \varphi) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi$$

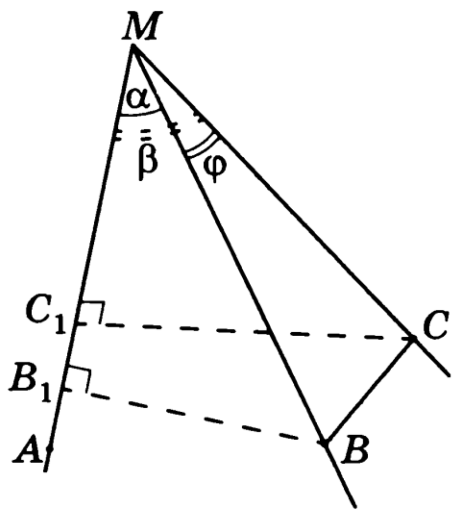
$$\Rightarrow\ d(M,l) = OM = \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\varphi}}{\sin\varphi}$$

чтд

Теорема косинусов (первая) для трехгранного угла

<u>Теорема 3</u>. $\boldsymbol{M}ABC$ – трехгранный угол, в котором $\angle AMB = \alpha, \angle AMC = \beta, \angle BMC = \varphi$ - плоские углы, а двугранный угол $B(AM)C$ при ребре AM, противолежащем плоскому углу φ, равен $\varphi_{\text{дв}}$, тогда

$$\boxed{\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\varphi_{\text{дв}}}\quad (*)$$



<u>Доказательство</u>: пусть точки B и C таковы, что $MB = MC = 1.$

Спроецируем эти точки на прямую AM,

пусть $B_1 = Pr_{\perp AM}(B), C_1 = Pr_{\perp AM}(C).$

Тогда $BB_1 = \sin\alpha, CC_1 = \sin\beta, B_1C_1 = |\cos\alpha - \cos\beta|.$

Пространственная теорема косинусов:

$$BC^2 = {BB_1}^2 + {CC_1}^2 + {B_1C_1}^2 - 2BB_1\cdot CC_1\cdot\cos\varphi_{\text{дв}}$$

$$BC^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\varphi_{\text{дв}} =$$

$$= 2 - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\varphi_{\text{дв}}$$

По теорема косинусов для $\triangle BMC$:

$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB\cdot MC\cdot\cos\varphi = 2 - 2\cos\varphi$, откуда следует (*) чтд

Следствие теоремы косинусов для трехгранного угла

<u>Следствие 1</u>. $\boxed{\cos\varphi_{дв} = \frac{\cos\varphi - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$

<u>Следствие 2 (вторая теорема косинусов)</u>. $\boxed{\cos\varphi = \frac{\cos\varphi_{дв} + \cos\alpha_{дв}\cdot\cos\beta_{дв}}{\sin\alpha_{дв}\cdot\sin\beta_{дв}}}$

$$\boxed{\cos\varphi_{дв} = -\cos\alpha_{дв}\cdot\cos\beta_{дв} + \sin\alpha_{дв}\cdot\sin\beta_{дв}\cdot\cos\varphi}$$

<u>Следствие 3</u>. (Эквивалент теоремы 1).

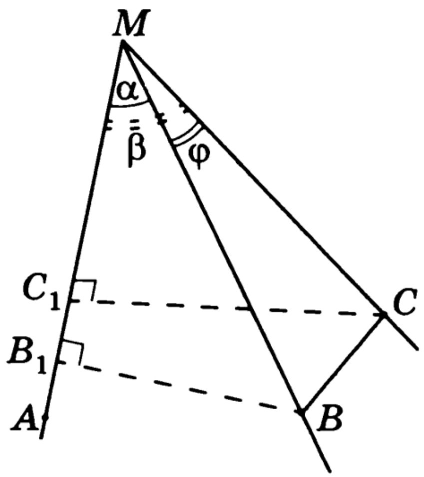
В трёхгранном угле величина каждого плоского угла меньше суммы величин двух других его плоских углов.

<u>Доказательство</u>:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\varphi_{дв} >$$

$$> \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$$

Значит, $\varphi < \alpha + \beta$

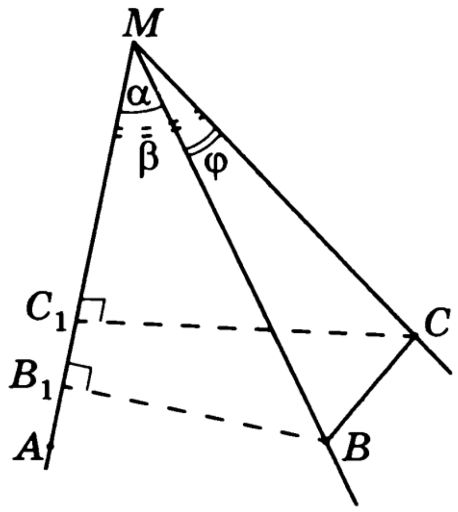


ЧТД

Теорема синусов для трехгранного угла

Теорема 4. $\boldsymbol{M}ABC$ – трехгранный угол, в котором $\angle AMB = \alpha$, $\angle AMC = \beta$, $\angle BMC = \varphi$ - плоские углы, а двугранный угол $B(AM)C$ при ребре AM, противолежащем плоскому углу φ, равен $\varphi_{\text{дв}}$, тогда

$$\boxed{\frac{\sin\varphi_{\text{дв}}}{\sin\varphi} = \frac{\sin\beta_{\text{дв}}}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha_{\text{дв}}}{\sin\alpha}}$$



Доказательство: $\cos\varphi_{\text{дв}} = \frac{\cos\varphi - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

$$\cos\beta_{\text{дв}} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cdot\cos\varphi}{\sin\alpha\cdot\sin\varphi}$$

$$\sin^2\varphi_{\text{дв}} = 1 - \cos^2\varphi_{\text{дв}} = \frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\varphi}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$$

Тогда $\frac{\sin^2\varphi_{\text{дв}}}{\sin^2\varphi} = \frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\varphi}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\varphi} = \frac{\sin^2\beta_{\text{дв}}}{\sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha_{\text{дв}}}{\sin^2\alpha}$

ЧТД

Правильный трехгранный угол

Опр. Трехгранный угол называется **правильным**, если все его плоские углы равны между собой, т.е. $\alpha = \beta = \varphi$

Следствие.

$$\cos \alpha_{\text{дв}} = \cos \beta_{\text{дв}} = \cos \varphi_{\text{дв}}$$

$$\cos \varphi_{\text{дв}} = \frac{\cos \varphi}{1+\cos \varphi}$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi_{\text{дв}}}{1-\cos \varphi_{\text{дв}}}$$

Задачи

1. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами $90°$, $20°$ и $120°$?

НЕТ, т.к. $120° > 90° + 20° = 110°$

2. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами $40°$, $30°$ и $70°$?

НЕТ, т.к. $70° = 30° + 40°$

3. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами $100°$, $150°$ и $110°$

$150° < 100° + 110°$

НО: НЕТ, т.к. $100° + 150° + 110° = 360°$

3. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами $90°$, $60°$ и $120°$

$120° < 90° + 60°$

$120° + 90° + 60° \neq 360°$

ДА

Задачи для самостоятельного решения

1. Плоские углы трехгранного угла равны $45°$, $45°$ и $60°$. Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная одной из тех граней, плоский угол которой равен $45°$. Найти угол между этой прямой и ребром двугранного угла, лежащим в упомянутой грани.
2. В трехгранном угле $OABC$ все плоские углы равны по $60°$. Какой угол с плоскостью BOC составляет ребро OA?
3. Плоские углы трехгранного угла равны $45°$, $60°$ и $90°$. Найдите двугранный угол, лежащий против плоского угла в $60°$.
4. В треугольной пирамиде две грани являются прямоугольными равнобедренными треугольниками, которые примыкают друг к другу гипотенузами и образуют угол α. Определить двугранный угол в этой пирамиде, ребром которого является катет прямоугольного треугольника.