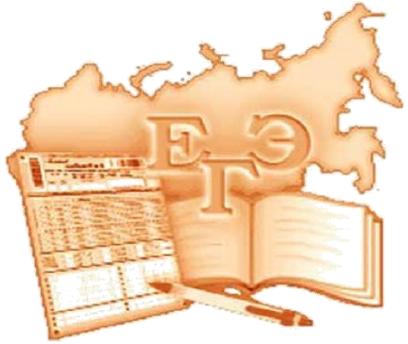


Региональный учебно-методический семинар.
«Методы и технологии подготовки обучающихся к итоговой аттестации по математике и физике в форме ВПР, ОГЭ и ЕГЭ»

Конструирование системы обучающих задач высокого уровня сложности линии уравнений и неравенств. Организация вложенного повторения

Волкова Ольга Ивановна
МАОУ «Лицей научно-инженерного профиля»
г. Королев Московской области
15 февраля 2019

Организация подготовки к профильному ЕГЭ по математике и ВУЗовским олимпиадам

1. Изучение нового материала
2. Решение задач
3. Повторение и закрепление материала

Необходимость итогового повторения

(тематическое повторение?!)

- Формулы и факты (запоминание, эмоциональная память, умение выводить)
- Методы, приёмы, идеи (аналитические способности, логическое мышление)
- Комбинированные, нестандартные задачи (синтетическое мышление)

(временные ограничения!)

В долгосрочной перспективе необходимо вложенное повторение

Кривая забывания Эббингауза и методика повторения

Экспериментальное изучение памяти (Герман Эббингауз, 1885).

Интервальное повторение (повторение через увеличивающиеся интервалы!)

- Первичное изучение/заучивание
- Повторение:
    1. через 3 часа,
    2. через сутки
    3. через 3 дня
    4. через неделю
    5. через месяц
    6. через 3 месяца
    7. через полгода
    8. через год

Первое устойчивое запоминание после 8-кратного предъявления информации.

Методика конструирования системы обучающих задач с целью организации вложенного повторения

Принципы:

- Конструктивный подход
- Целевое конструирование
- Вариативность

Подходы:

- Метод обратного хода
- Метод равносильной замены
- Метод усложнения структурной единицы
- Метод усложнения структурной единицы с наращиванием одной или нескольких идей

Метод равносильной замены

Тема: решение уравнений высших степеней (9 класс)

Исходная идея: равносильный переход

Дополнительная идея: метод интервалов при решении неравенств

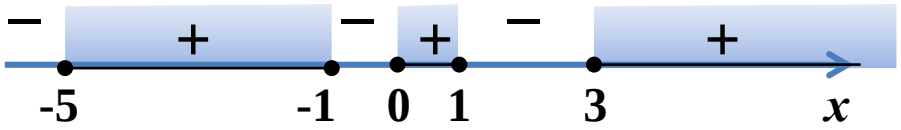
$$ab \geq 0 \Leftrightarrow |a+b| = |a| + |b|$$

$$a = x^3 - 2x^2 - 3x \qquad b = x^2 + 4x - 5$$

$$|x^3 - 2x^2 - 3x| + |x^2 + 4x - 5| = |x^3 - 2x^2 - 3x + x^2 + 4x - 5|$$

$$|x^3 - 2x^2 - 3x| + |x^2 + 4x - 5| = |x^3 - x^2 + x - 5|$$

$$(x^3 - 2x^2 - 3x)(x^2 + 4x - 5) \geq 0$$



Ответ: $x \in [-5; -1] \cup [0; 1] \cup [3; +\infty)$

Метод равносильной замены

Тема: решение показательных уравнений (11 класс)

Исходная идея: равносильный переход

Дополнительная идея: метод интервалов при решении неравенств, сравнение логарифмов

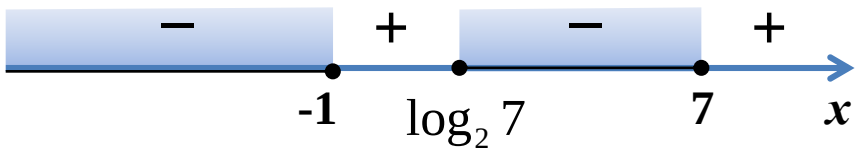
$$ab \le 0 \Leftrightarrow |a-b| = |a| + |b|$$

$$a = 2^x - 7 \qquad b = x^2 - 6x - 7$$

$$|2^x - 7| + |x^2 - 6x - 7| = |2^x - 7 - (x^2 - 6x - 7)|$$

$$|2^x - 7| + |x^2 - 6x - 7| = |2^x - x^2 + 6x|$$

$$(2^x - 7)(x^2 - 6x - 7) \le 0$$



Ответ: $x \in (-\infty;-1] \cup [\log_2 7\,;7]$

Метод обратного хода на основании равносильной замены

$$\boxed{\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{ab} \leq a + b}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{2}{3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1 \text{ или } \begin{cases} \frac{2}{3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x \geq 0 \\ 3^x - 2^x \geq 0 \end{cases}$$

$$2\sqrt{(3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x)(3^x - 2^x)} \leq 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x + 3^x - 2^x$$

$$2\sqrt{5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x - 3 \cdot 4^x} \leq 2^{x+1} - 3^x$$

Задачи с геометрическим содержанием. Метод обратного хода и равносильной замены

Напишите уравнение, задающее на плоскости отрезок с концами в точках A (0; 0) и B (3; 3).

$$0 \le x \le 3, \qquad x(x-3) \le 0$$

$$|x(x-3)| + x(x-3) = 0$$

$$x = y, \qquad x - y = 0, \qquad |x-y| = 0,$$

$$\big||x(x-3)| + x(x-3)\big| + |x-y| = 0$$

Пример работы метода равносильной замены

$$a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|a|}{a} - 1 = 0$$
$$a \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a| + a = 0$$
$$a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|a|}{a} + 1 = 0$$

$$\begin{cases} f > 0 \\ \left[\begin{array}{l} g \leq 0 \\ h < 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|f|}{f} - 1 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} |g| + g = 0 \\ \frac{|h|}{h} + 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{|f|}{f}} + \sqrt{(|g| + g)\left(\frac{|h|}{h} + 1\right)} = 0$$

Равносильные переходы для одной переменной

$$a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|a|}{a} + 1 = 0$$

$$a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|a|}{a} - 1 = 0$$

$$a \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a| + a = 0$$

$$a \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a| - a = 0$$

$$\forall a \quad \Leftrightarrow \quad |a| + a \geq 0, \quad |a| - a \geq 0$$

$$\forall a, a \neq 0 \Leftrightarrow \frac{|a|}{a} + 1 \geq 0, \qquad \frac{|a|}{a} - 1 \leq 0$$

Примеры равносильных переходов для двух переменных

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{ab} \leq a + b$$

$$ab \geq 0 \Leftrightarrow |a + b| = |a| + |b|$$

$$ab \leq 0 \Leftrightarrow |a - b| = |a| + |b|$$

$$ab \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{ab} + ab \geq 0$$

Метод усложнения структурной единицы

I. $x^3 + x + 2\sqrt[3]{2x^3 + x + 5} \geq 6$

$f(x) = x^3 + x + 2\sqrt[3]{2x^3 + x + 5}$ ↑ при $\forall x \in \mathbb{R}$ и $f(1) = 6$

Ответ: $x \geq 1$

II. $\sin^3 x + \sin x + 2\sqrt[3]{2\sin^3 x + \sin x + 5} \geq 6$

$\sin x \geq 1$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

III. $\ln^3 x + \ln x + 2\sqrt[3]{2\ln^3 x + \ln x + 5} \geq 6$

$\ln x \geq 1$

Ответ: $x \geq e$

Метод усложнения структурной единицы

I. $x^3 + x + 2\sqrt[3]{2x^3 + x + 5} \geq 6$

IV. При каком значении параметра a неравенство

$a^{3|x|} + a^{|x|} + 2\sqrt[3]{2a^{3|x|} + a^{|x|} + 5} \geq 6$ верно при $\forall x \in \mathbb{R}$?

$a^{|x|} \geq 1$

Ответ: при $a \geq 1$

V. Решить неравенство при $x > 0$

$$+ 2\sqrt[3]{2\left(x - \frac{e^x+1}{x} + 1 + e^x\right)^3 + x - \frac{e^x+1}{x} + 1 + e^x + 5} \geq 6$$

Метод усложнения структурной единицы

V. Решить неравенство при $x > 0$

$$+2\sqrt[3]{2\left(x-\frac{e^x+1}{x}+1+e^x\right)^3+x-\frac{e^x+1}{x}+e^x+}\sqrt{\left(x-\frac{e^x+1}{x}+1+e^x\right)^3+x-\frac{e^x+1}{x}+e^x+6}\geq 5$$

$x-\frac{e^x+1}{x}+1+e^x \geq 1$ $\qquad$ $f(x)=x-\frac{e^x+1}{x}+1+e^x$

$f'(x)=\frac{x^2+1+e^x(x^2-x+1)}{x^2}>0$ при $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

$f(x) \uparrow$ на $(-\infty;0)$ и $f(x) \uparrow$ на $(0;+\infty)$

$f(1)=1$ и т.к. по условию требуется решить при $x>0$ Ответ: $x \geq 1$

Метод усложнения структурной единицы с наращиванием идеи

I. $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

Ответ: $x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$

II. $\begin{cases} 2\ln x + \lg y + \operatorname{lb} z = 7 \\ \ln x + 2\lg y + \operatorname{lb} z = 8 \\ \ln x + \lg y + 2\operatorname{lb} z = 9 \end{cases}$

$\ln x = 1 \quad \lg y = 2 \quad \operatorname{lb} z = 3$

Ответ: $x = e \quad y = 100 \quad z = 8$

Метод усложнения структурной единицы с наращиванием идеи

$$\begin{cases} 2\ln x + \lg y + \mathrm{lb}\, z = 7 \\ \ln x + 2\lg y + \mathrm{lb}\, z = 8 \\ \ln x + \lg y + 2\,\mathrm{lb}\, z = 9 \end{cases}$$

Ответ: $x = e \qquad y = 100 \qquad z = 8$

III. $$(2\ln x + \lg y + \mathrm{lb}\, z - 7)^2 + \sqrt{\ln x + 2\lg y + \mathrm{lb}\, z - 8} + \\ + \ln^2(\ln x + \lg y + 2\,\mathrm{lb}\, z - 8) = 0$$

Ответ: $x = e \qquad y = 100 \qquad z = 8$

IV. $$(2\ln x + \lg y + \mathrm{lb}\, z - 7)^2 + \sqrt{\ln x + 2\lg y + \mathrm{lb}\, z - 8} + \\ + \ln^2(\ln x + \lg y + 2\,\mathrm{lb}\, z - 8) \leq 0$$

Ответ: $x = e \qquad y = 100 \qquad z = 8$

Метод усложнения структурной единицы с наращиванием нескольких идей

I. $\begin{cases} xy + yz = 10 \\ yz + zx = 12 \\ zx + xy = 6 \end{cases}$ Ответ: $x = 1 \quad y = 2 \quad z = 4$

II. Сколько ∃ значений t, при которых

$$\sqrt{t},\ 2\arccos t + 2,\ \sqrt{t^2 + t + 14}$$

составляют геометрическую прогрессию, если известно, что

$$\left(\sqrt{t} + \sqrt{t^2 + t + 14}\right)(\arccos t + 1) = 5$$

$$2\sqrt{t^2 + t + 14}\,(\arccos t + 1) + \sqrt{t^3 + t^2 + 14t} = 12$$

$$\sqrt{t^3 + t^2 + 14t} + 2\sqrt{t}\,(\arccos t + 1) = 6$$

Метод усложнения структурной единицы с наращиванием нескольких идей

$$\begin{cases} xy + yz = 10 \\ yz + zx = 12 \\ zx + xy = 6 \end{cases}$$ Ответ: $x = 1 \quad y = 2 \qquad z = 4$

$$\sqrt{t} = 1,\ 2\arccos t + 2 = 2,\ \sqrt{t^2 + t + 14} = 4$$

$$t = 1$$

Проверить свойство геометрической прогрессии!

Ответ: $t = 1$

Больше 3 идей для школы не наращиваем!

Олимпиады: МЭ до 5 идей, РЭ до 6 идей, ЗЭ до 7 идей.

Возможные проблемы при конструировании задач. Базовая задача

I. $\log_4(\sqrt{x}+2)\cdot\log_5(x+1)\geq 1$

ОДЗ: $x\geq 0$

$f(x)=\log_4(\sqrt{x}+2)>0$ и $f(x)\uparrow$ на $[0;+\infty)$

$g(x)=\log_5(x+1)>0$ и $g(x)\uparrow$ на $[0;+\infty)$

Значит, $f(x)\cdot g(x)>0$ и $f(x)\cdot g(x)\uparrow$ на $[0;+\infty)$

$f(4)\cdot g(4)=1$

Ответ: $x\in[4;+\infty)$

Возможные проблемы и пути их решения при конструировании задач

I. $\log_4(\sqrt{x}+2)\cdot\log_5(x+1)\geq 1$

II. $\log_4(x+2)\cdot\log_5(x^2+1)\geq 1$

ОДЗ: $x\geq -2$, нельзя обеспечить монотонность

III. $\log_4(x+2)\cdot\log_5(x^2+1)\geq \log_x x$

теперь ОДЗ: $x>0, x\neq 1$ есть разрыв!

IV. $\log_4(\sqrt{x^2+2x-3}+2)\cdot\log_5(x^2+2x-2)\geq \log_x 4$

теперь ОДЗ: $x>1$, есть монотонность

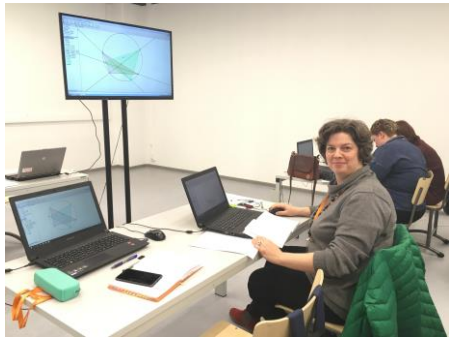
Но трудности нахождения x !

Методика конструирования системы обучающих задач с целью организации вложенного повторения

Автор методики: Труфанова Елена Анатольевна

Учитель математики МАОУ лицея № 23 г. Калининграда, руководитель Центра дополнительного математического образования, двукратный победитель конкурса «Лучшие учителя России» в рамках приоритетного национального проекта «Образование».

Преподаватель Летних математических школ. Лектор курсов повышения квалификации учителей математики Института развития образования Калининградской области и образовательного центра «Сириус». Методист Центра педагогического мастерства г. Москва (2014-2018). Член жюри олимпиады по математике регионального и заключительного этапа (2017)

Курсы повышения квалификации
Образовательный центр «Сириус» г. Сочи

https://sochisirius.ru/edu/pedagogam