АКЦИЯ

«100 БАЛЛОВ ДЛЯ ПОБЕДЫ»

г.о. Королёв

январь 2020 года

Мастер-класс для учащихся 11 классов
и учителей математики

Решение задачи с экономическим содержанием в ЕГЭ по математике (задание 17)

Волкова Ольга Ивановна
ГАОУ МО «Лицей научно-инженерного профиля»
г. Королёв Московской области
15 января 2020

Типы задач с экономическим содержанием в ЕГЭ

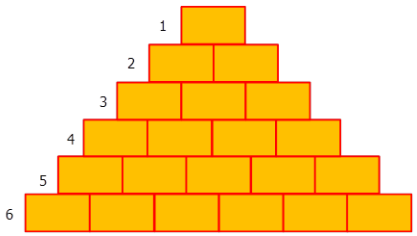
- Вклады

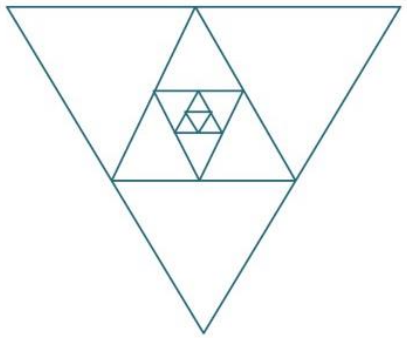
- Оптимизация с помощью производной или без производной

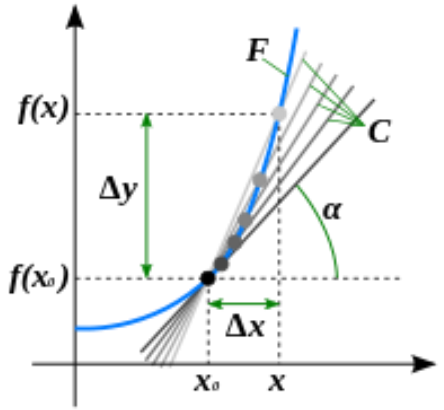
- Кредиты

Математический аппарат

- Арифметика
- Простые и сложные проценты
- Прогрессия (арифметическая и геометрическая)
- Производная, техника ее вычисления
- Применение производной в задачах оптимизации







Критерии оценивания Задания 17

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: - неверный ответ из-за вычислительной ошибки - верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Этапы подготовки

1. Подготовка. Базовый математический аппарат. Повторить темы: проценты, прогрессия, производная.
2. Разбор нескольких типовых задач.
3. Самостоятельное решение задач. Основная цель: научиться строить математические модели самостоятельно.
4. Важно: решать БЕЗ калькулятора и вести учёт времени.

Задача на вклады

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 5 млн рублей.

Задача на вклады

Оформление цепочкой процесса изменения величины вклада

Пусть первоначальный вклад составляет S млн руб, тогда:

$$S \xrightarrow{+10\%} 1{,}1S$$

$$1{,}1S \xrightarrow{+10\%} 1{,}1 \cdot 1{,}1S = 1{,}1^2S$$

$$1{,}1^2S \xrightarrow{+3} 1{,}1^2S + 3 \xrightarrow{+10\%} 1{,}1 \cdot (1{,}1^2S + 3)$$

$$1{,}1 \cdot (1{,}1^2S + 3) \xrightarrow{+3} 1{,}1 \cdot (1{,}1^2S + 3) + 3 \xrightarrow{+10\%} 1{,}1 \cdot (1{,}1 \cdot (1{,}1^2S + 3) + 3)$$

В итоге к концу 4 года имеем на счету: $1{,}1^4S + 3 \cdot 1{,}1^2 + 3 \cdot 1{,}1$

Задача на вклады. Решение

Пусть первоначальный вклад составляет S млн руб, тогда за четыре года банк начислит на вклад:

$$1{,}1^4 S + 3 \cdot 1{,}1^2 + 3 \cdot 1{,}1 - S - 6 \geq 5$$

$$(1{,}1^4 - 1)S \geq 11 - 3{,}3 \cdot 2{,}1$$

$$(1{,}1^4 - 1)S \geq 4{,}07$$

$$S \geq \frac{4{,}07}{(1{,}1^4 - 1)}, \text{ где } \frac{4{,}07}{(1{,}1^4 - 1)} \approx 8{,}769 \ldots$$

Ответ: наименьший размер первоначального вклада составляет 9 млн рублей.

Схемы погашения кредитов

- **Стандартные схемы**:
  - **Дифференцированные платежи** (регрессивная схема) – задолженность по кредиту погашается равномерно, размеры выплат различны и уменьшаются постепенно, первая выплата самая большая, используется формула арифметической прогрессии
  - **Аннуитетные платежи** – выплаты осуществляются равными платежами, используется формула геометрической прогрессии
- **Нестандартные схемы**

Схема с **дифференцированными платежами**

Буквенные обозначения, используемые в таблице:

S - сумма кредита

n – количество платёжных периодов

q % - процент

$$\boxed{\boldsymbol{k = 0,01q}}$$

Тогда формула для процентного роста имеет вид:

$$A + \frac{q}{100}A = A(1 + 0{,}01q) = \boxed{\boldsymbol{A(1 + k)}}$$

Дифференцированные платежи. Оформление таблицей

S - сумма кредита, q % - процент, $k = 0,01q$, n – количество платёжных периодов

	Долг в начале периода	Долг в конце периода после начисления процентов	Выплата
1	S	$S(1+k)$	$S(1+k) - \left(S - \frac{S}{n}\right) = Sk + \frac{S}{n} = \frac{n}{n}Sk + \frac{S}{n}$
2	$S - \frac{S}{n}$	$\frac{n-1}{n}S(1+k)$	$\frac{n-1}{n}S(1+k) - \left(S - \frac{2S}{n}\right) = \frac{n-1}{n}Sk + \frac{S}{n}$
3	$S - \frac{2S}{n}$	$\frac{n-2}{n}S(1+k)$	$\frac{n-2}{n}S(1+k) - \left(S - \frac{3S}{n}\right) = \frac{n-2}{n}Sk + \frac{S}{n}$
…	…	…	…
n	$S - \frac{(n-1)S}{n} = \frac{S}{n}$	$\frac{1}{n}S(1+k)$	$\frac{1}{n}Sk + \frac{S}{n}$
	Итого:	0	$\boldsymbol{S + \frac{Sk}{n}\frac{(n+1)n}{2} = S + \frac{Sk(n+1)}{2}}$

Задача на кредиты (дифференцированная схема)

Сергей берет 15 января в банке кредит на 19 месяцев. Условия кредита таковы:

- 1 числа каждого месяца долг возрастает на q % по сравнению с концом предыдущего месяца
- со 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить часть долга
- 15 числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше, чем долг на 15 число предыдущего месяца

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите q.

Задача на кредиты (дифференцированная схема). Составление таблицы

S – сумма кредита, q - ежемесячный процент, $k = 0{,}01q$

	Долг на 15 число	Долг на 1 число после начисления процентов	Выплаты со 2 по 14 число
1	S	$S(1+k)$	$S(1+k) - \left(S - \frac{S}{19}\right) = \frac{S}{19} + Sk$
2	$S - \frac{S}{19} = \frac{18S}{19}$	$\frac{18S}{19}(1+k)$	$\frac{18S}{19}(1+k) - \frac{17S}{19} = \frac{S}{19} + \frac{18S}{19}k$
3	$S - \frac{2S}{19} = \frac{17S}{19}$	$\frac{17S}{19}(1+k)$	$\frac{17S}{19}(1+k) - \frac{16S}{19} = \frac{S}{19} + \frac{17S}{19}k$
…			
19	$S - \frac{18S}{19} = \frac{S}{19}$	$\frac{S}{19}(1+k)$	$\frac{S}{19} + \frac{S}{19}k$

Задача на кредиты (дифференцированная схема). Решение

Общая сумма выплат на 30% больше суммы кредита, значит,

$$\frac{S}{19} + Sk + \frac{S}{19} + \frac{18S}{19}k + \frac{S}{19} + \frac{17S}{19}k \ldots + \frac{S}{19} + \frac{S}{19}k = 1{,}3S$$

$$S + Sk\frac{1}{19}(1 + 2 + \cdots + 18 + 19) = 1{,}3S$$

$$Sk\frac{1}{19}\left(\frac{1+19}{2}19\right) = 0{,}3S$$

$k = 0{,}03$ и, соответственно, $q = 3$

Ответ: $q = 3\%$

Схема с аннуитетными платежами

Буквенные обозначения, используемые в таблице:

S - сумма кредита

n – количество платёжных периодов

x – размер выплат

q % - процент

$$\boxed{\boldsymbol{m = 1 + 0,01q}}$$

Тогда формула для процентного роста имеет вид:

$$A + \frac{q}{100}A = A(1 + 0{,}01q) = \boxed{\boldsymbol{A \cdot m}}$$

Аннуитетные платежи. Оформление таблицей

S - сумма кредита, q % - процент, $m = 1 + 0,01q$, n – количество платёжных периодов

	Долг в начале периода	Долг в конце периода после начисления процентов	Выплата
1	S	Sm	x
2	$Sm - x$	$(Sm - x)m = Sm^2 - mx$	x
3	$Sm^2 - mx - x$	$(Sm^2 - mx - x)m = Sm^3 - m^2x - mx$	x
4	$Sm^3 - m^2x - mx - x$	…	x
	…	…	
n	$Sm^{n-1} - m^{n-2}x - \cdots - mx - x$	$(Sm^{n-1} - m^{n-2}x - \cdots - mx - x)m = Sm^n - m^{n-1}x - \cdots - mx - x$	x
	$0 = Sm^n - m^{n-1}x - \cdots - mx - x = Sm^n - x(m^{n-1} + \cdots + m + 1) = Sm^n - x\frac{m^n - 1}{m - 1}$		
	$\boldsymbol{x = \frac{m^n(m-1)}{m^n - 1}S}$		

Задача на кредиты (аннуитетная схема)

31 октября 2018 г. Сергей взял в банке 9 930 000 руб. в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 октября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какова должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Задача на кредиты (аннуитетная схема). Составление таблицы

S – сумма кредита, q - ежемесячный процент, $m = 1 + 0{,}01q$

	Долг на начало периода	Долг после начисления процентов 31 октября	Выплаты
1	S	Sm	x
2	$Sm - x$	$(Sm - x)m$	x
3	$(Sm - x)m - x$	$\big((Sm - x)m - x\big)m$	x
	$\big((Sm - x)m - x\big)m - x =$ $= Sm^3 - x(m^2 + m + 1) = 0$		

Задача на кредиты (аннуитетная схема). Решение

$$0 = Sm^3 - x(m^2 + m + 1)$$

$$Sm^3 = x\frac{m^3 - 1}{m - 1}$$

$$x = \frac{Sm^3(m-1)}{m^3 - 1}$$

$$x = \frac{9\,930\,000 \cdot 1{,}1^3 \cdot (1{,}1-1)}{1{,}1^3 - 1} = 3\,993\,000 \text{ руб.}$$

Ответ: ежегодный платёж должен быть равен 3 993 000 руб.

Задача на оптимизацию

Бизнесмен является владельцем двух заводов, выпускающих одинаковую продукцию в разных городах. На втором заводе используются более современное оборудование, позволяющее за одинаковое время с первым заводом производить больше продукции, чем на первом заводе. Известно, что если рабочие с первого завода трудятся суммарно $3t^2$ часов в неделю, то за это время они производят t единиц товара. А если рабочие второго завода трудятся суммарно $4t^2$ часов в неделю, то за это время они производят t единиц товара. На обоих заводах за каждый час работы рабочему платят 1000 руб. За неделю необходимо выпустить суммарно на обоих заводах 30 единиц продукции. Какую наименьшую сумму придется потратить за неделю на оплату труда рабочих?

Задача на оптимизацию. Решение. Построение математической модели

Завод	Время работы, часов	Количество продукции, шт.
I	$3x^2$	x
II	$4y^2$	y

Общее количество продукции (шт.)

$N = x + y = 30$

Пусть зарплата (тыс. руб.) выражается формулой

$S = 1 \cdot (3x^2 + 4y^2) = 3x^2 + 4(30 - x)^2$

Рассмотрим вспомогательную непрерывную функцию $S(x) = 3x^2 + 4(30 - x)^2$, определенную на отрезке $[0; 30]$ и дающую целые значения величины S при целых значениях переменной x из указанного отрезка.

Задача на оптимизацию. Решение. Работа с математической моделью

Задача сводится к

$S(x) = 3x^2 + 4(30 - x)^2 \to \min$ при $x \in [0; 30]$

$S(x) = 7x^2 - 240x + 3600$ – квадратичная функция, ветви вверх, минимум в вершине $x_в = \frac{120}{7} = 17\frac{1}{7} \in [0; 30]$

Следовательно, зарплата будет минимальна при $x_0 = 17$ (ближайшее к вершине целое значение абсциссы), тогда

$S_{\min} = 3 \cdot 17^2 + 4 \cdot (13)^2 = 867 + 676 = 1543$ тыс. руб.

Ответ: придётся потратить как минимум 1 543 000 руб.

Основные книги для подготовки

Другие книги для подготовки

Другие книги для подготовки

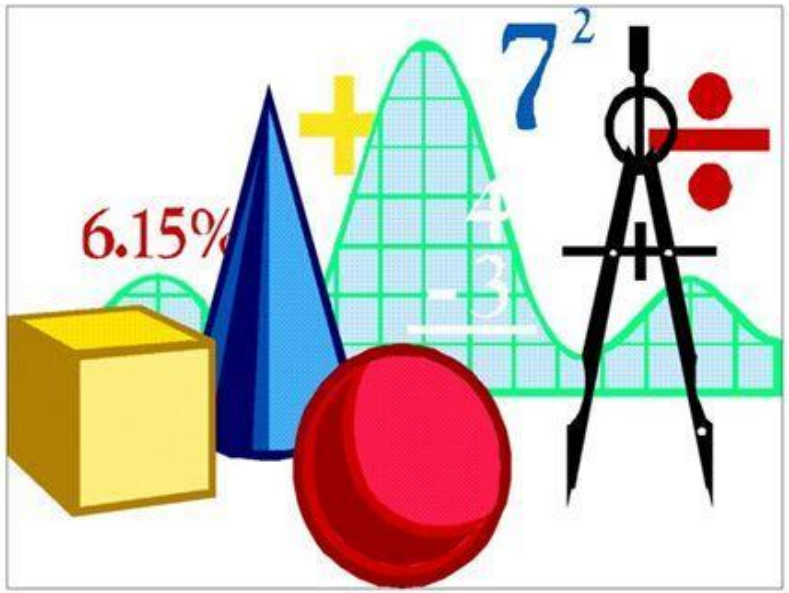
Другие материалы для подготовки

ФИПИ

http://www.fipi.ru/

https://ege.sdamgia.ru/

http://alexlarin.net/



Удачи на ЕГЭ!

Спасибо за внимание!