Итоговая аттестация. КПК. Сириус

29 июля 2020

Группа 4

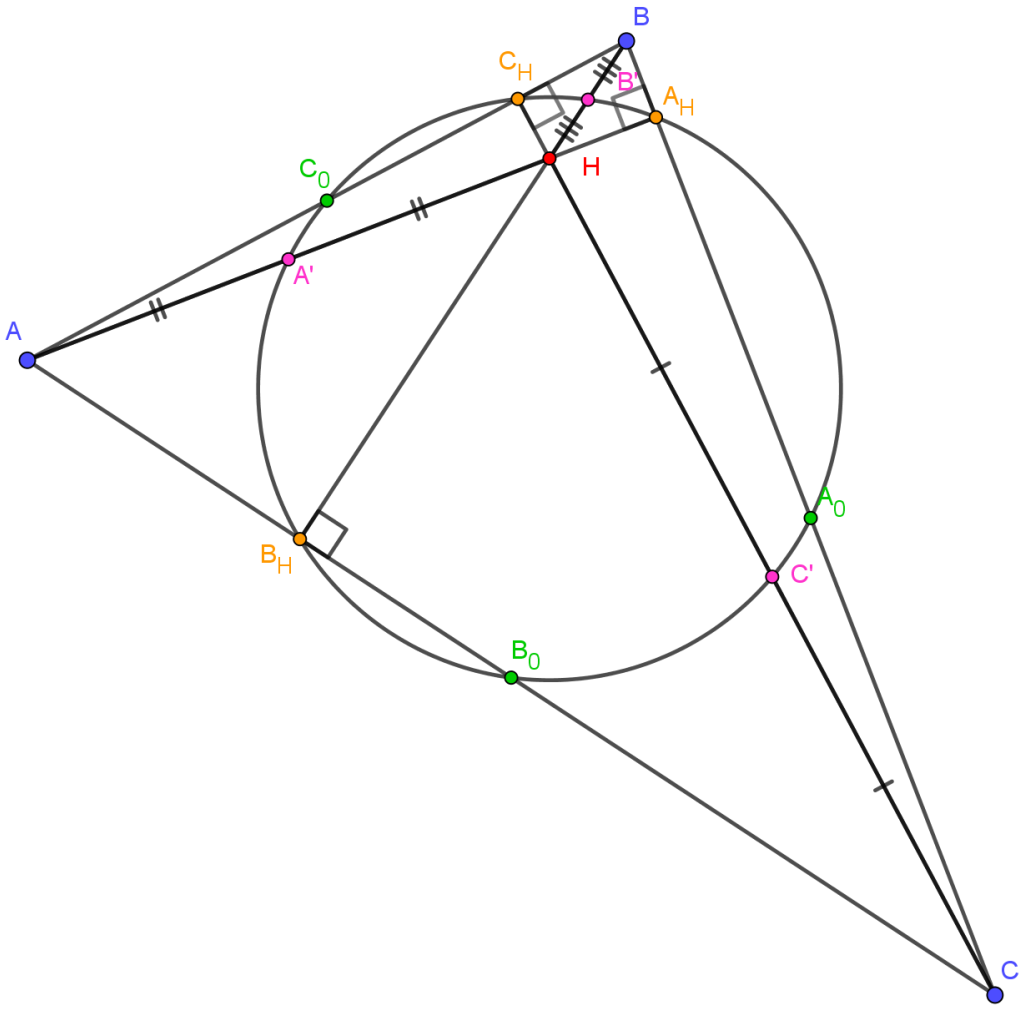
Волкова Ольга Ивановна, Фешина Юлия Владимировна

ГАОУ МО «Лицей научно-инженерного профиля» (ЛНИП)

г. Королев, Московская область

Задание: с помощью леммы Мансиона доказать существование окружности Эйлера: «В любом треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков между ортоцентром и вершинами принадлежат одной окружности». Рассмотреть три вида треугольников (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный).

1. Пусть H – ортоцентр остроугольного $\measuredangle ABC$. Доказать, что $\measuredangle ABC$, $\measuredangle ABH$, $\measuredangle BCH$ и $\measuredangle CAH$ имеют общую окружность Эйлера.
2. Существует ли треугольник, у которого окружность Эйлера касается его описанной окружности? Исследовать этот вопрос с помощью Geogebra и результат наблюдений доказать.



Вопрос 1.

I. остроугольный $\measuredangle ABC$

Дано: остроугольный $\measuredangle ABC$,

CC_H, BB_H, AA_H – высоты $\measuredangle ABC$,

H – ортоцентр $\measuredangle ABC$,

ω – окружность, описанная около $\measuredangle A_H B_H C_H$

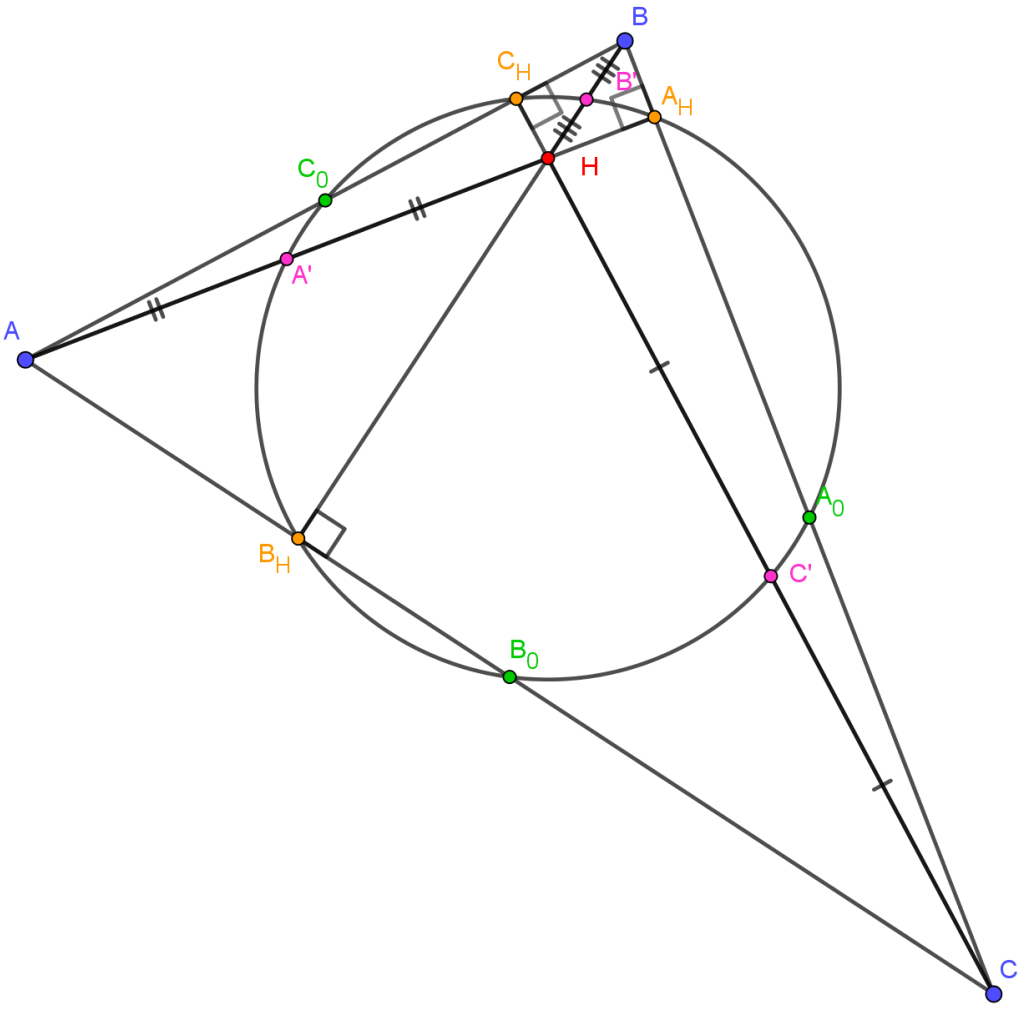
$\omega \cap AB = \{C_0, C_H\}, \omega \cap AC = \{B_0, B_H\}, \omega \cap BC = \{A_0, A_H\}$

$\omega \cap BB_H = B', \omega \cap AA_H = A', \omega \cap CC_H = C'$

Доказать:

Утв. 1 $BB' = B'H, AA' = A'H, CC' = C'H$
Утв. 2 $AC_0 = C_0B, BA_0 = A_0C, CB_0 = B_0A$

т.е. точки $C_0, A_0, B_0, C_H, B_H, A_H, C', B', A'$ лежат на одной окружности (это окружность Эйлера)



Доказательство:

Лемма 1. Ортоцентр остроугольного $\measuredangle ABC$ является инцентром $\measuredangle A_H B_H C_H$

Доказательство:

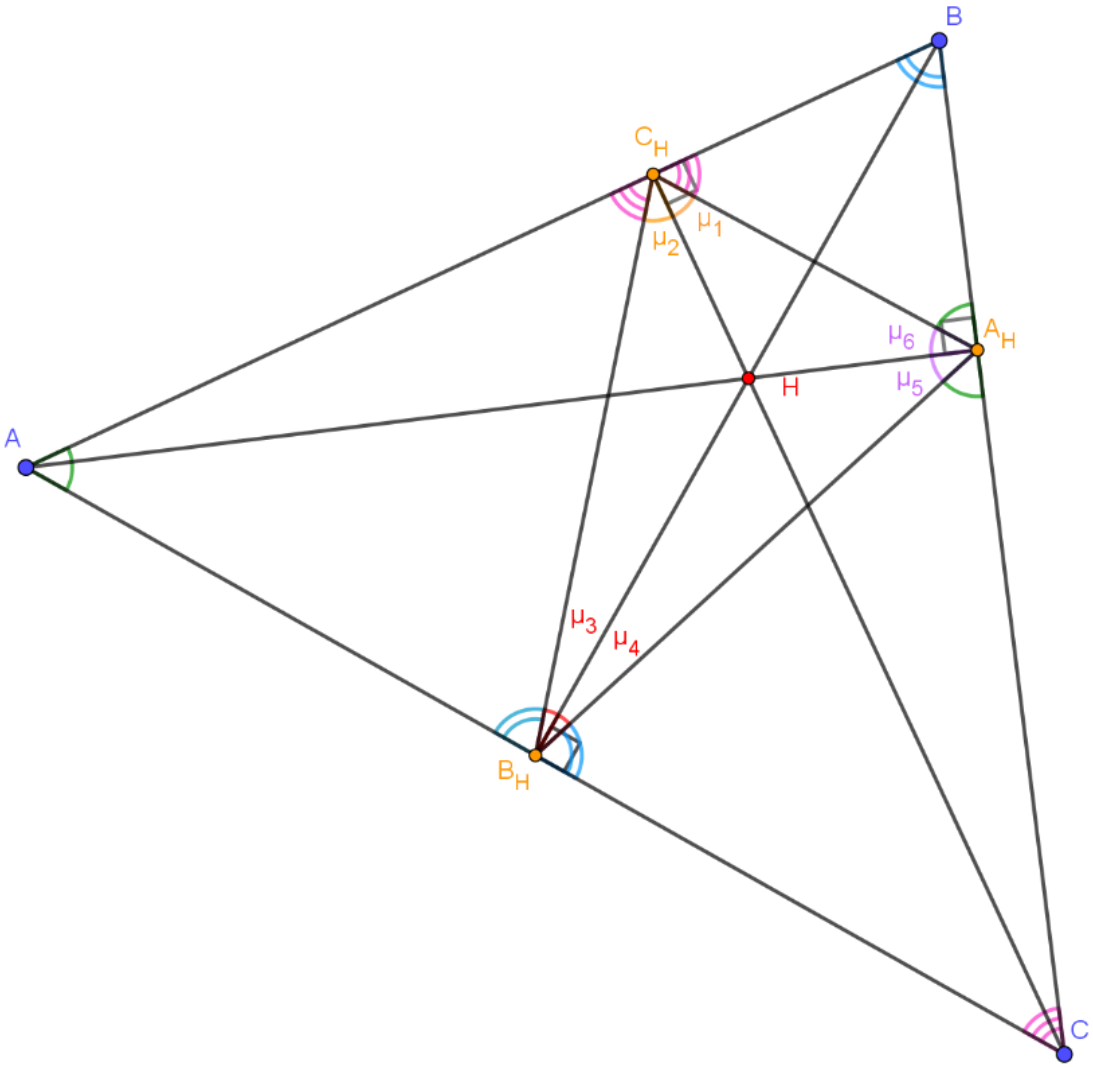
докажем, что CH, AH, BH – биссектрисы углов $\measuredangle A_H B_H C_H$.

$\measuredangle C_H B A_H \sim \measuredangle C_H B_H A \sim \measuredangle C_H B A_H \sim \measuredangle CBA$ (по двум углам, антипараллельность) $\Longrightarrow$

$\angle B C_H A_H = \angle A C_H B_H, \angle A B_H C_H = \angle A_H B_H C, \angle C_H A_H B = \angle B_H A_H C \Longrightarrow$

$\angle \mu_1 = \angle \mu_2, \angle \mu_3 = \angle \mu_4, \angle \mu_5 = \angle \mu_6$ как разности прямых и равных углов.

чтд



Лемма 2. Для остроугольного $\measuredangle ABC$ точки A, B, C – центры вневписанных окружностей $\measuredangle A_H B_H C_H$

Доказательство:

докажем, что C – центр вневписанной окружности $\measuredangle A_H B_H C_H$. Для этого достаточно доказать, что точка C – есть точка пересечения биссектрисы $\angle B_H C_H A_H$ и биссектрисы одного из внешних углов $\measuredangle A_H B_H C_H$, например $\angle B_H A_H K$.

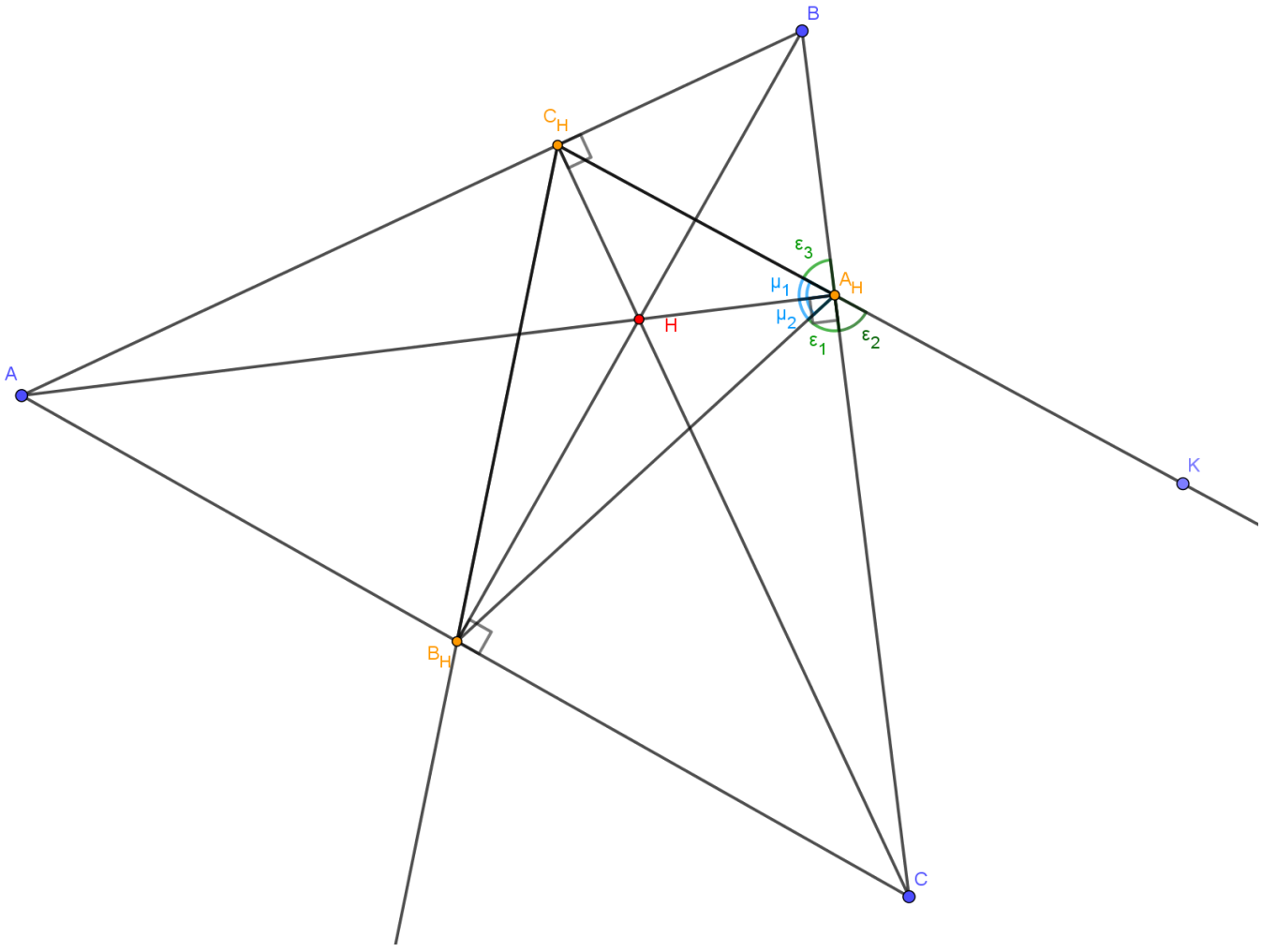
$C_H C$ -биссектриса $\angle B_H C_H A_H$ по лемме 1. Докажем, что $A_H K$ – биссектриса $\angle B_H A_H K$.

Поскольку $\angle \mu_1 = \angle \mu_2$ (т.к. по лемме 1 $A_H H$ – биссектриса $\angle C_H A_H B_H$), $\angle \varepsilon_3 = \angle \varepsilon_2$ (вертикальные), $\angle \varepsilon_3 = 90° - \angle \mu_1$, $\angle \varepsilon_1 = 90° - \angle \mu_2$. Значит, $\angle \varepsilon_1 = \angle \varepsilon_2$, т.е. $A_H C$ – биссектриса внешнего угла $\measuredangle A_H B_H C_H$.

Итак, точка C – центр вневписанной окружности $\measuredangle A_H B_H C_H$.

Аналогично можно показать, что точки B и A – центры вневписанных окружностей $\measuredangle A_H B_H C_H$.

чтд



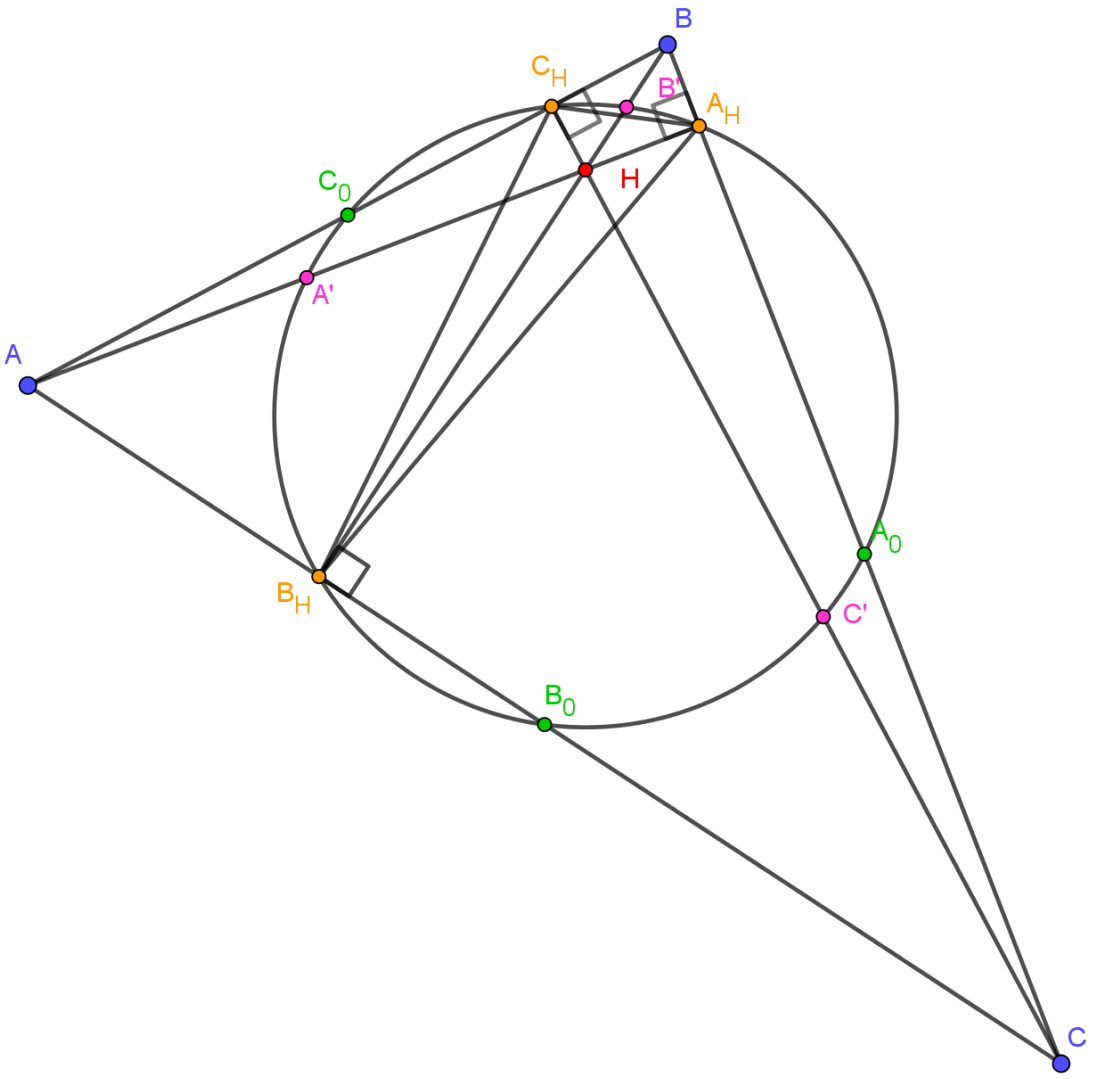
<u>Докажем Утв. 1</u>: что $BB' = B'H, AA' = A'H, CC' = C'H$

<u>Доказательство</u>: по лемме Мансиона для $\measuredangle A_H B_H C_H$, т .к. $C_H C$ – биссектриса $\angle B_H C_H A_H$

ω – окружность, описанная около $\measuredangle A_H B_H C_H$, $\omega \cap CC_H = C'$ и C – центр вневписанной окружности $\measuredangle A_H B_H C_H$, то $HC' = C'C$.

Аналогично $HA' = A'A, HB' = B'B$

чтд



Докажем Утв. 2: что $AC_0 = C_0B$, $BA_0 = A_0C$, $CB_0 = B_0A$

Доказательство: для точки C_0: соединим точки C_0 и C', лежащие на окружности ω. Получим хорду $C'C_0$. $\angle C_0C_HC'$ - вписанный и прямой, значит, $C'C_0$ – диаметр окружности ω.

По лемме Мансиона для $\triangle A_HB_HC_H$: $B_HC' = A_HC'$.

Рассмотрим $\triangle C_0B_HC'$ и $\triangle C_0A_HC'$. Они прямоугольные, т.к. $\angle C_0B_HC'$и $\angle C_0A_HC'$ опираются на диаметр $C'C_0$ окружности ω.

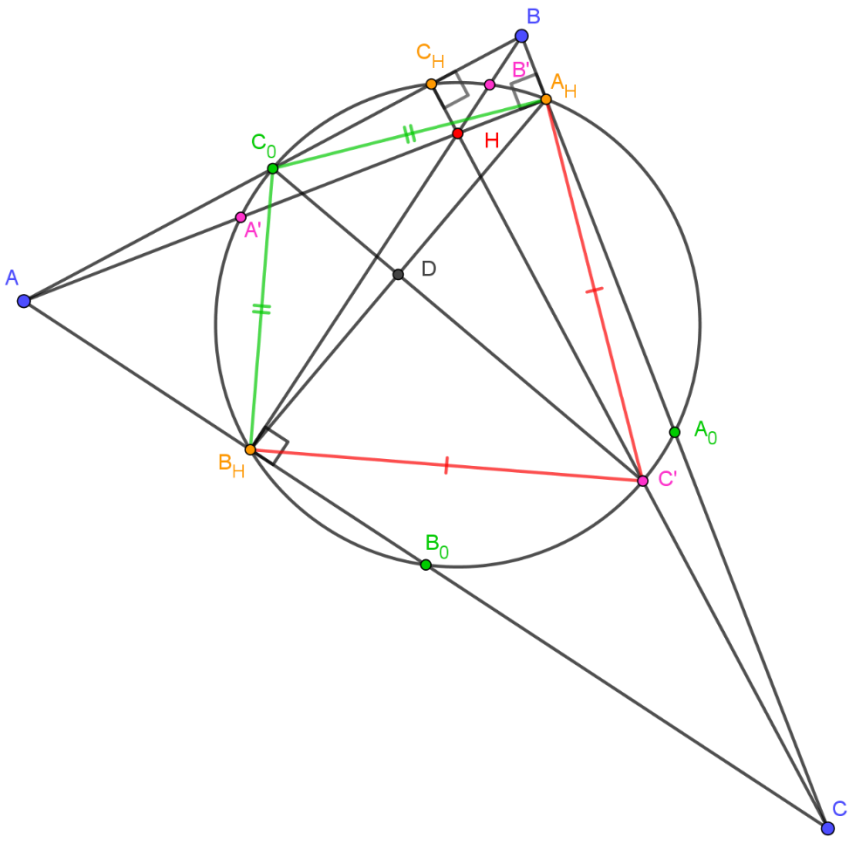
Поскольку $C'C_0$ – общая гипотенуза и $B_HC' = A_HC'$,значит, $\triangle C_0B_HC' = \triangle C_0A_HC'$ (по гипотенузе и катету).

Тогда $C_0B_H = C_0A_H$, т.е. $\triangle C_0B_HA_H$ равнобедренный. Пусть $D = C'C_0 \cap B_HA_H$. Значит, C_0D в нем биссектриса, медиана и высота, т.е. C_0D -серединный перпендикуляр к хорде B_HA_H окружности ω.

$\angle AB_HB = \angle BA_HA = 90°$ и точки B_H и A_H лежат по одну сторону от прямой AB. Значит, точки A, B_H, A_H, B лежат на одной окружности с диаметром AB, B_HA_H – ее хорда, C_0D - серединный перпендикуляр к этой хорде. Значит, на нем лежит центр этой окружности, т.е. C_0 - середина AB. Другими словами, $AC_0 = C_0B$.

Аналогично $BA_0 = A_0C$, $CB_0 = B_0A$.

чтд



II. прямоугольный $\measuredangle ABC$

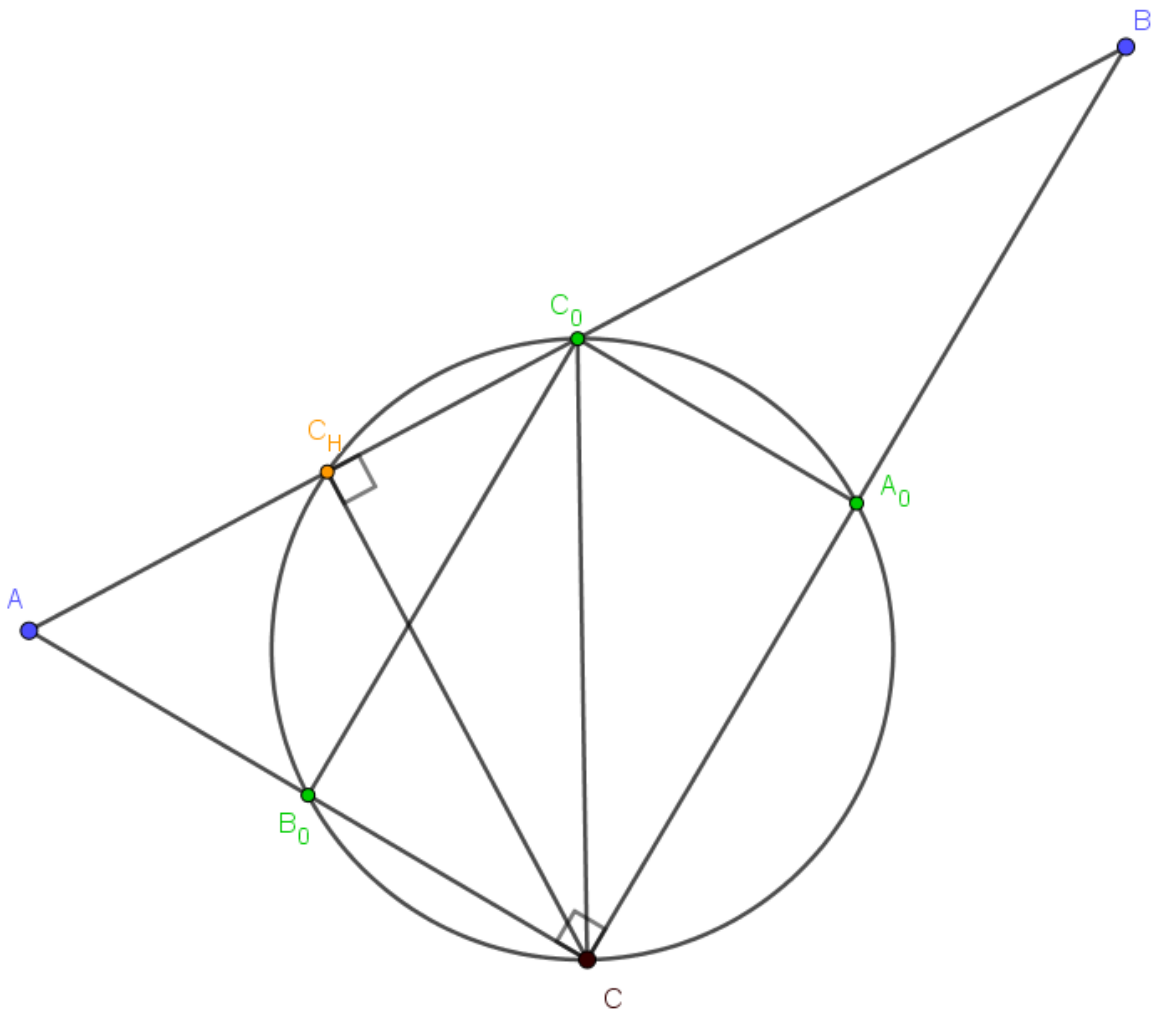
В этом случае 9 точек окружности Эйлера вырождаются в 5 точек, т.к. основания высот точки B_H и A_H совпадают с точкой C, а середины отрезков между ортоцентром и вершинами совпадают с A_0, B_0 и C, т.е. $B_H = C$ и $A_H = C$, а также $A_0 = A', B_0 = B', C = C'$.

Докажем, что 5 точек A_0, B_0, C_0, C_H и C лежат на одной окружности.

Доказательство: т.к. точки A_0, B_0, C_0 – середины сторон $\measuredangle ABC$, значит, $CB_0C_0A_0$ – прямоугольник. Значит, его можно вписать в окружность φ с диаметром CC_0.

Пусть точки C, A_0, B_0, C_0 лежат на окружности φ. $\varphi \cap AB = \{C_0, C_H\}$. Докажем, что CC_H – высота $\measuredangle ABC$. $\angle C_0C_HC$ и $\angle C_0A_0C$ – вписанные углы окружности φ и опираются на дугу C_0B_0C . Значит, $\angle C_0C_HC = \angle C_0A_0C = 90°$, т.е. CC_H -высота.

чтд

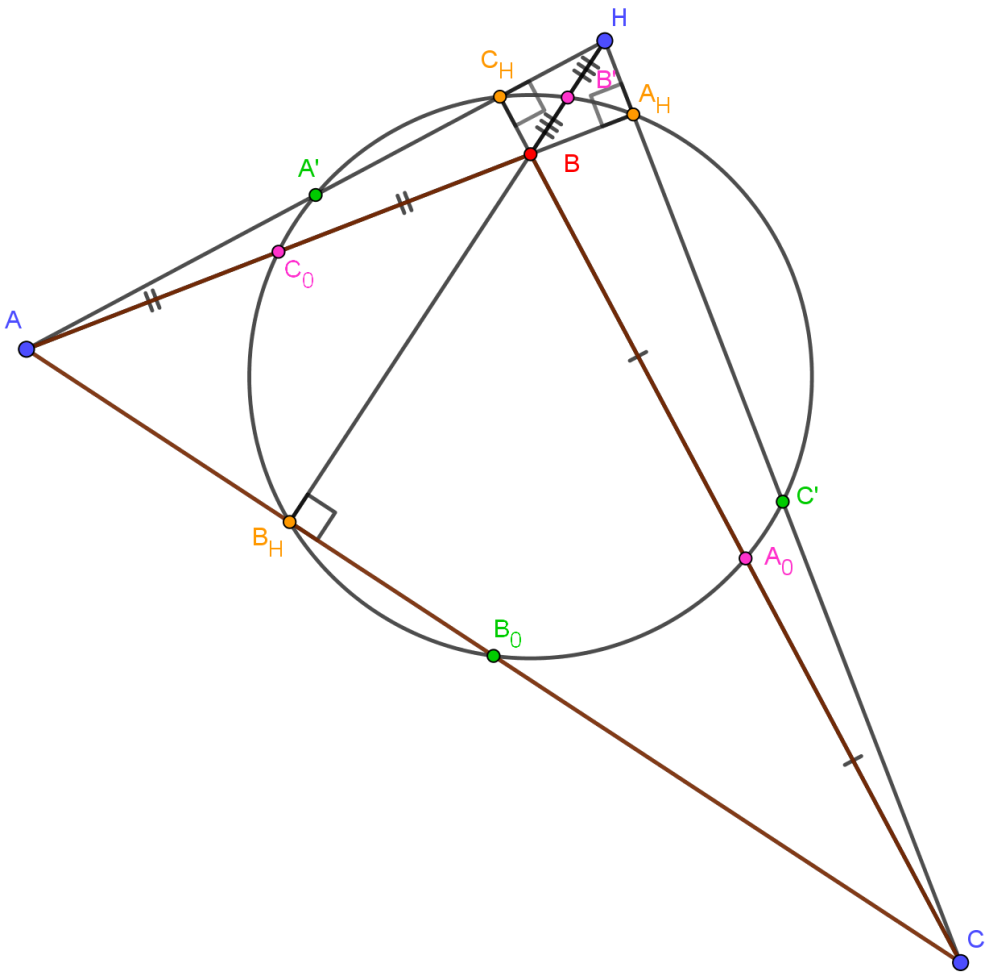


III. тупоугольный $\measuredangle ABC$

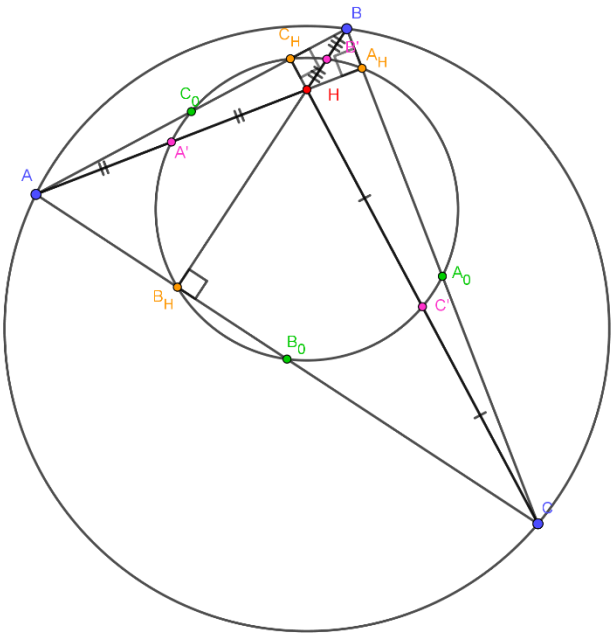
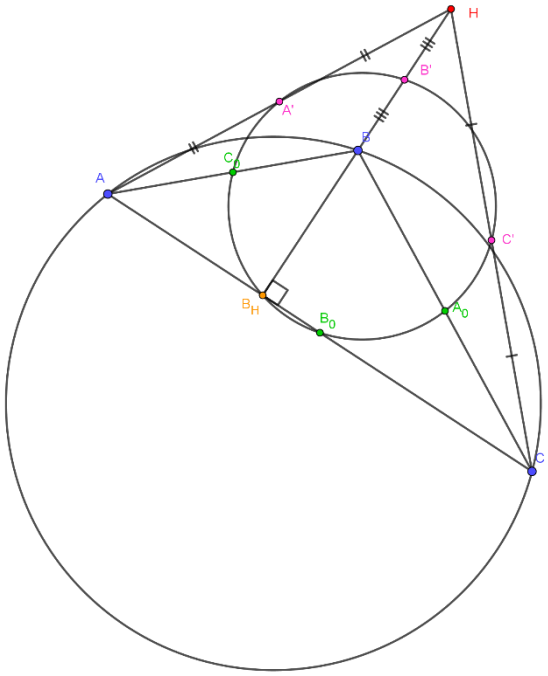
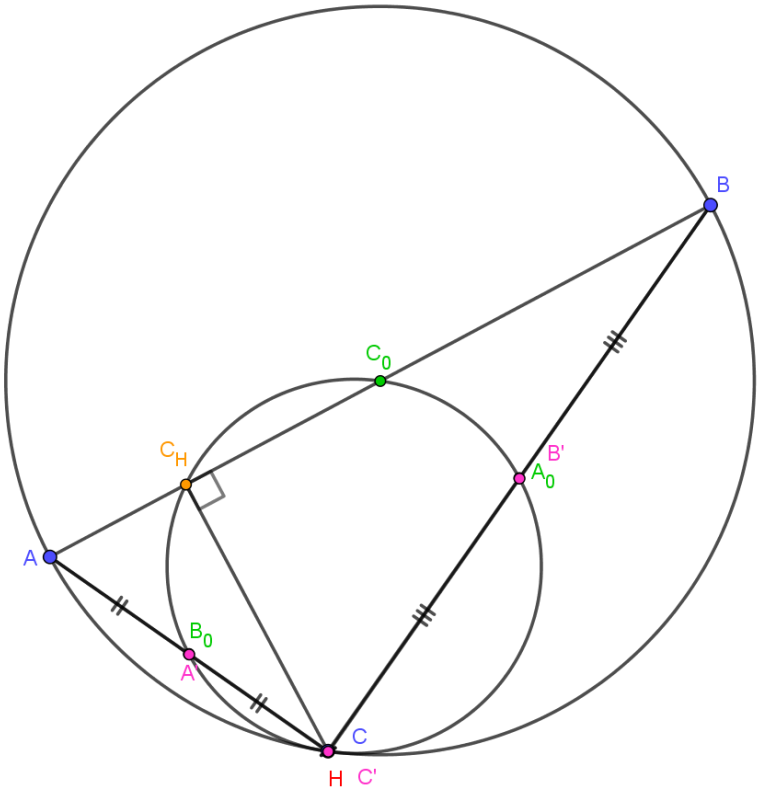
Дано: тупоугольный $\measuredangle ABC$ (пусть, например, $\angle B$ - тупой), пусть CC_H, BB_H, AA_H – высоты $\measuredangle ABC$, тогда точка пересечения прямых, содержащих эти высоты – точка H – ортоцентр $\measuredangle ABC$.

Получаем остроугольный $\measuredangle AHC$, в котором $\measuredangle A_H B_H C_H$ - ортотреугольник. Можно повторить доказательство теоремы для остроугольного $\measuredangle AHC$, для него точки $C_0, A_0, B_0, C_H, B_H, A_H, C', B', A'$ лежат на одной окружности (это окружность Эйлера). Заметим, что точки $A, C, B_0, C_H, B_H, A_H, B'$ имеют одинаковый смысл для каждого из треугольников $\measuredangle AHC$ и $\measuredangle ABC$, а оставшиеся три из девяти точек меняются положениями между собой следующим образом: вершина B $\measuredangle ABC$ играет роль ортоцентра в $\measuredangle AHC$ (и наоборот), точка A_0 - середина стороны BC в $\measuredangle ABC$ играет роль точки C' середины отрезка между ортоцентром и вершиной в $\measuredangle AHC$ (и наоборот), точка C_0 - середина стороны AC в $\measuredangle ABC$ играет роль точки A' середины отрезка между ортоцентром и вершиной в $\measuredangle AHC$ (и наоборот). Значит, по доказанному ∃ окружность ω, описанная около тупоугольного $\measuredangle ABC$ и проходящая через соответствующие девять точек. Другими словам, мы получили, что что $\measuredangle ABC$, $\measuredangle ABH$, $\measuredangle BCH$ и $\measuredangle AHC$ имеют общую окружность Эйлера.

.



Вопрос 2.

Треугольник, у которого окружность Эйлера касается его описанной окружности существует. Для любого прямоугольного треугольника окружность Эйлера касается его описанной окружности.

Для остроугольного треугольника это невозможно (одна окружность вложена в другую), и для тупоугольного треугольника это тоже невозможно (соответствующие окружности пересекаются).