Исследование тригонометрических функций. Построение графиков

Построение графиков функций путем преобразования известных графиков. I способ

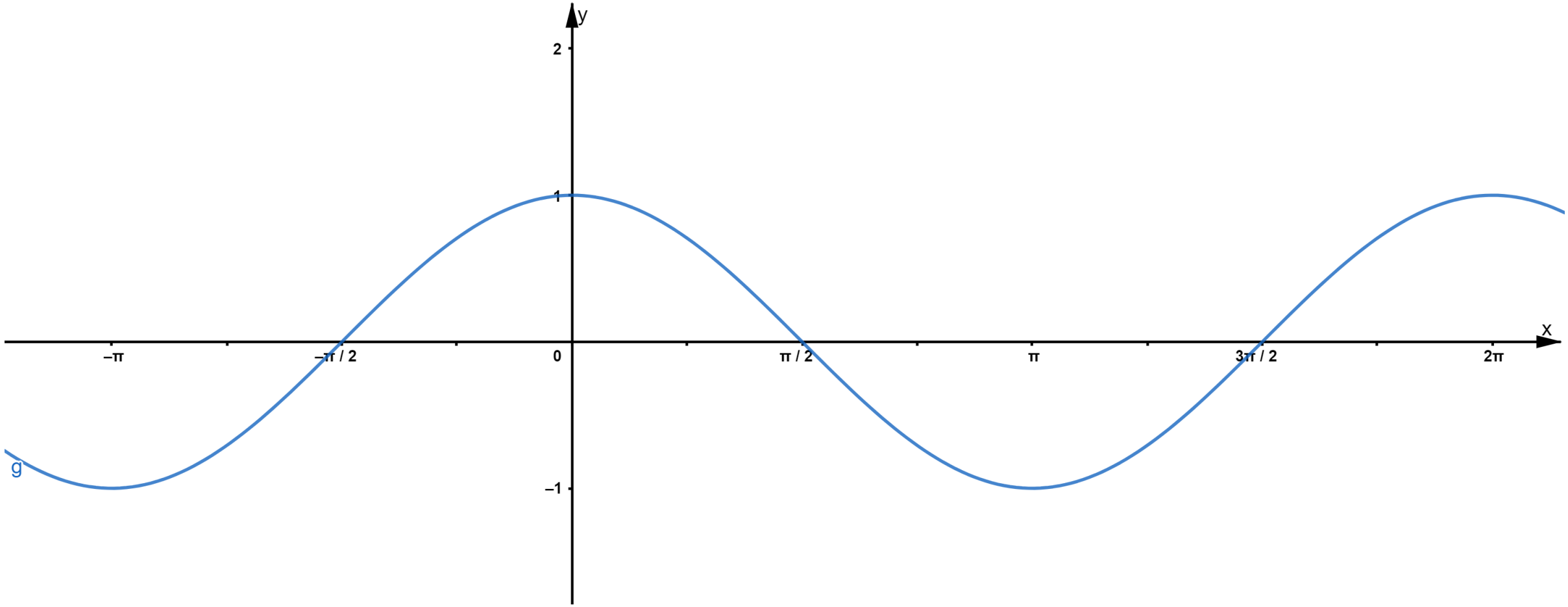
$$\boxed{y = A \cdot f(ax + b) + B}$$

Порядок действий:

1. сдвиг в соответствующую сторону на $|b|$ единиц вдоль оси Ox
2. Растяжение в $\frac{1}{|a|}$ раз /сжатие в $|a|$ раз вдоль оси Ox – неподвижной остается точка, лежащая на оси Oy (при $a < 0$ еще отражение относительно оси Oy)
3. Растяжение в $|A|$ раз /сжатие в $\frac{1}{|A|}$ раз вдоль оси Oy – неподвижной остается точка, лежащая на оси Ox (при $A < 0$ еще отражение относительно оси Ox)
4. сдвиг в соответствующую сторону на $|B|$ единиц вдоль оси Oy

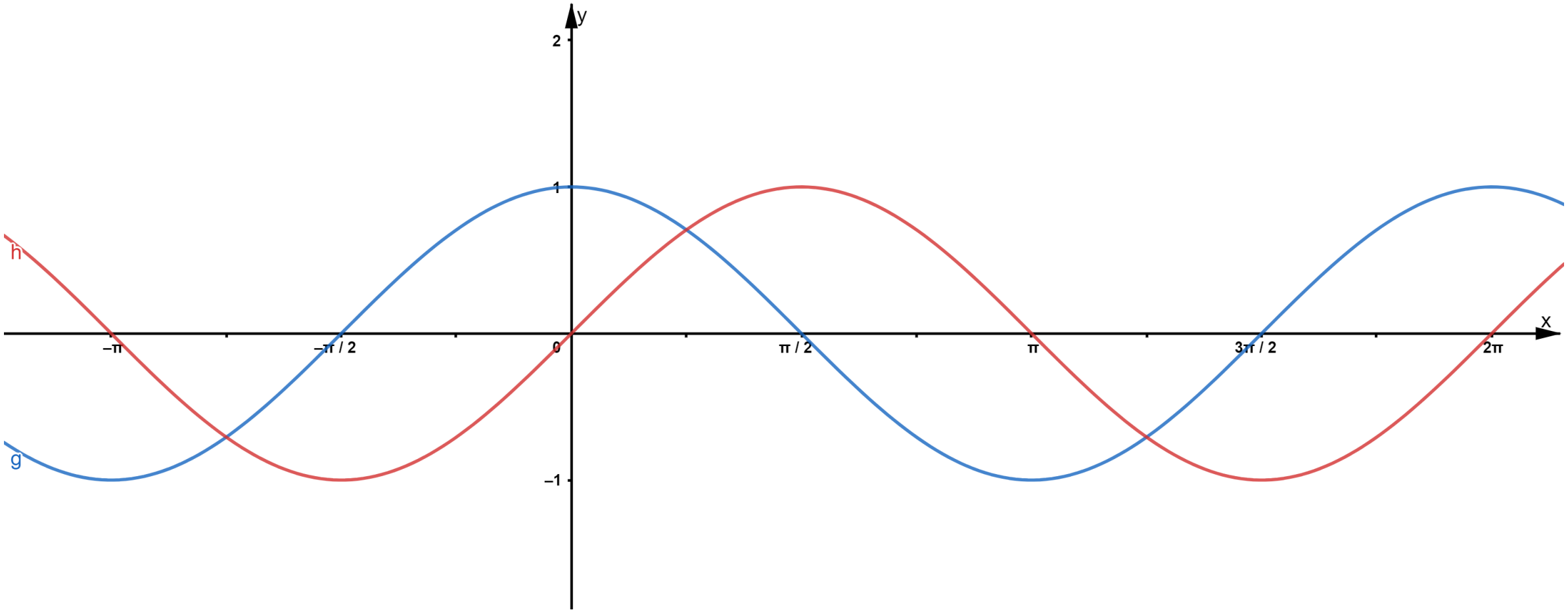
Построение графика $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. I способ

Шаг 1: $y = \cos x$



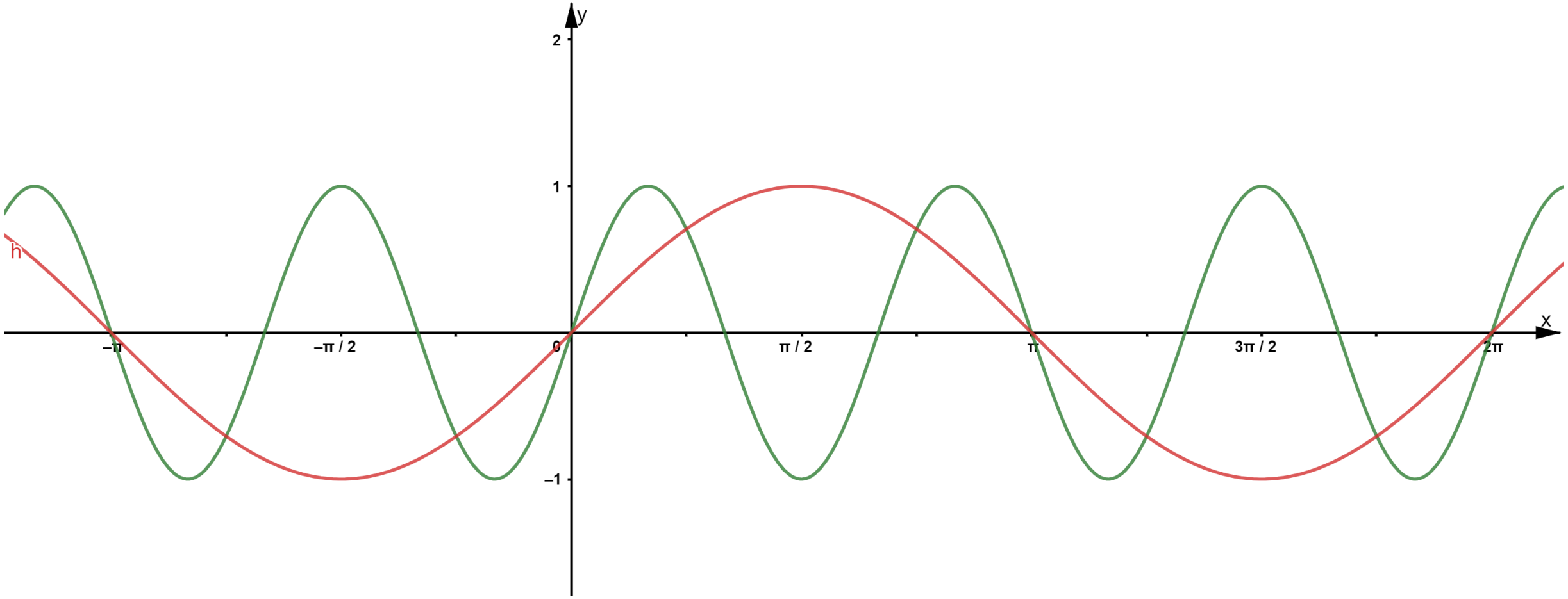
Построение графика $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. I способ

Шаг 2: $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Сдвиг



Построение графика $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. I способ

Шаг 3: $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. Сжатие



Построение графиков функций путем преобразования известных графиков. II способ

$$y = A \cdot f(ax + b) + B$$

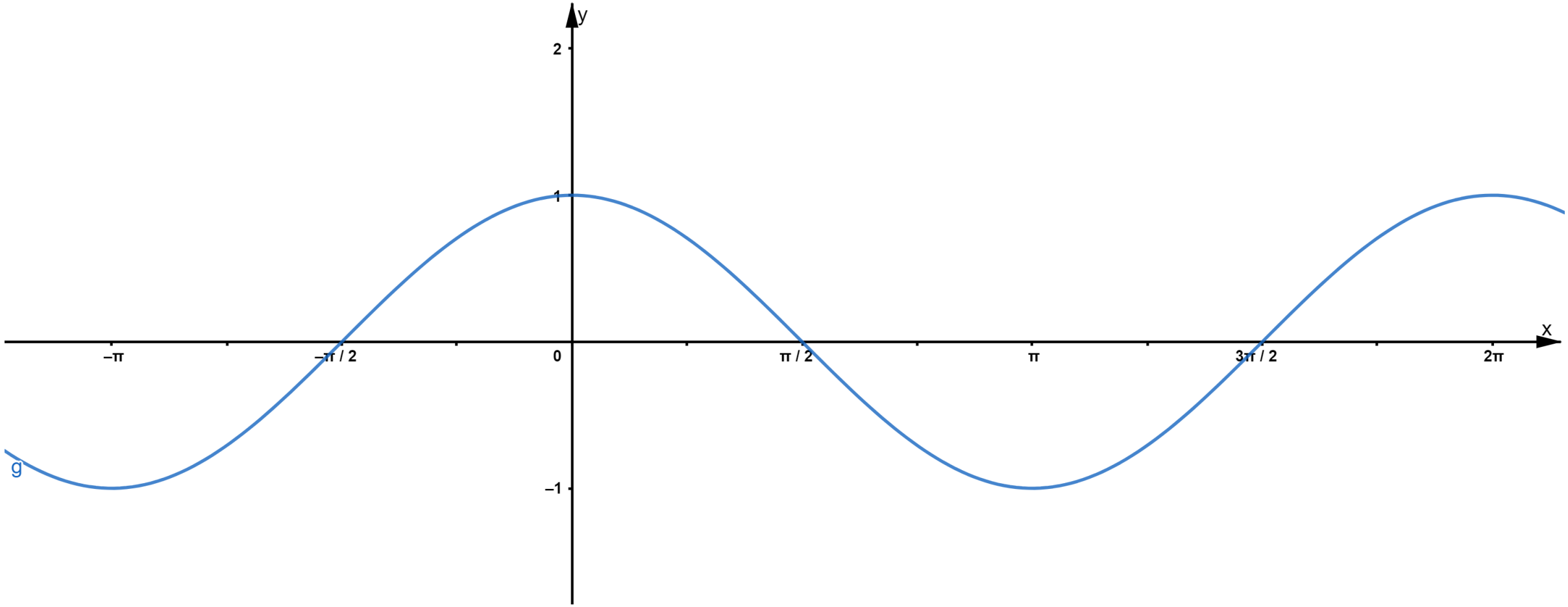
$$y = A \cdot f\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right) + B$$

Порядок действий:

1. растяжение в $\frac{1}{|a|}$ раз /сжатие в $|a|$ раз вдоль оси Ox – неподвижной остается точка, лежащая на оси Oy (при $a < 0$ еще отражение относительно оси Oy)
2. сдвиг в соответствующую сторону на $\left|\frac{b}{a}\right|$ единиц вдоль оси Ox
3. растяжение в $|A|$ раз /сжатие в $\frac{1}{|A|}$ раз вдоль оси Oy – неподвижной остается точка, лежащая на оси Ox (при $A < 0$ еще отражение относительно оси Ox)
4. сдвиг в соответствующую сторону на $|B|$ единиц вдоль оси Oy

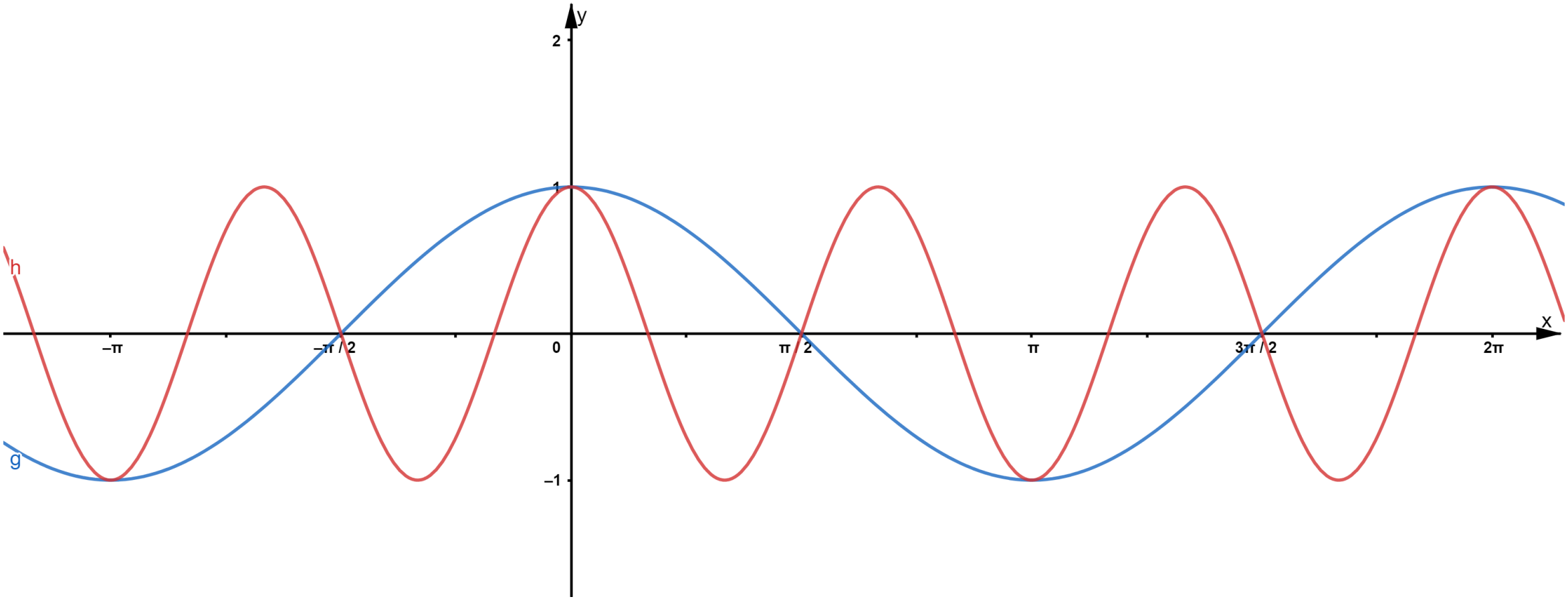
Построение графика $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. II способ

Шаг 1: $y = \cos x$



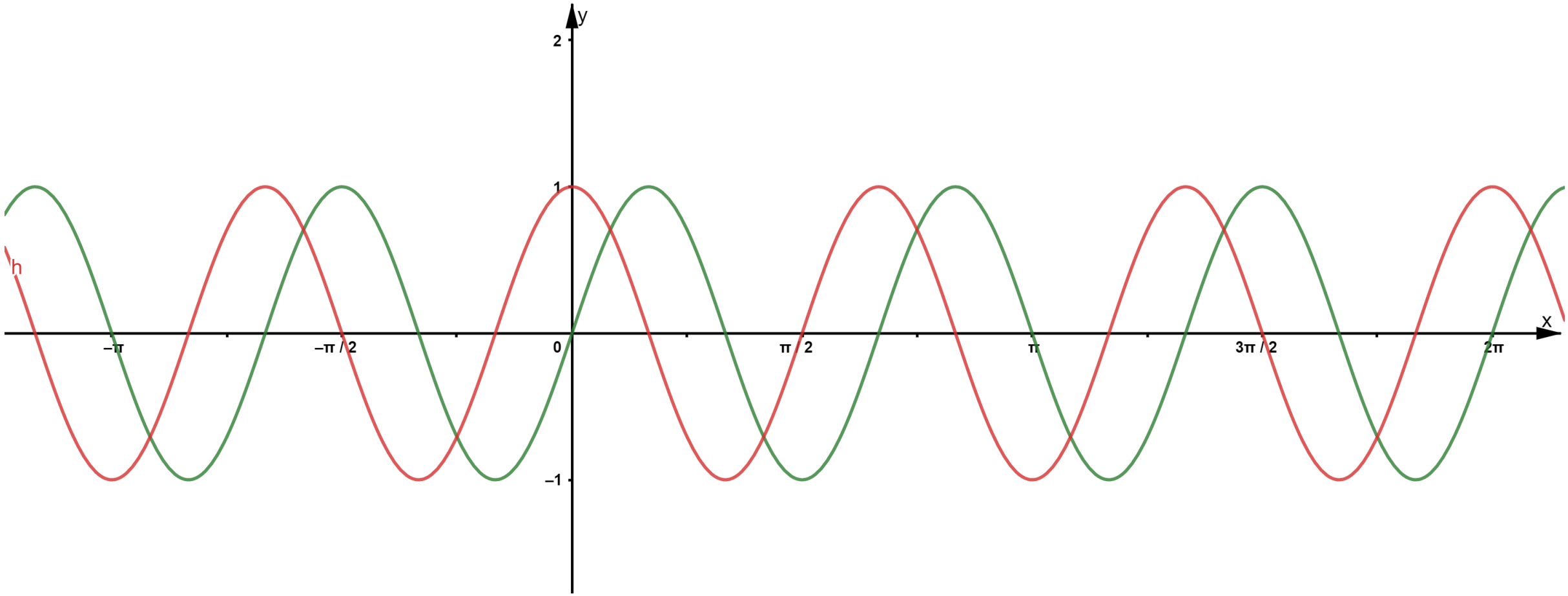
Построение графика $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. II способ

Шаг 2: $y = \cos 3x$. Сжатие



Построение графика $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. II способ

Шаг 3: $y = \cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$. Сдвиг



Построение графиков с модулем

Порядок действий:

1. $\boxed{y = A \cdot f(a|x| + b) + B}$

сначала сдвиг и растяжение/сжатие/отражение, потом модуль (оставить все, что есть при $x > 0$ и симметрично отразить относительно оси Oy)

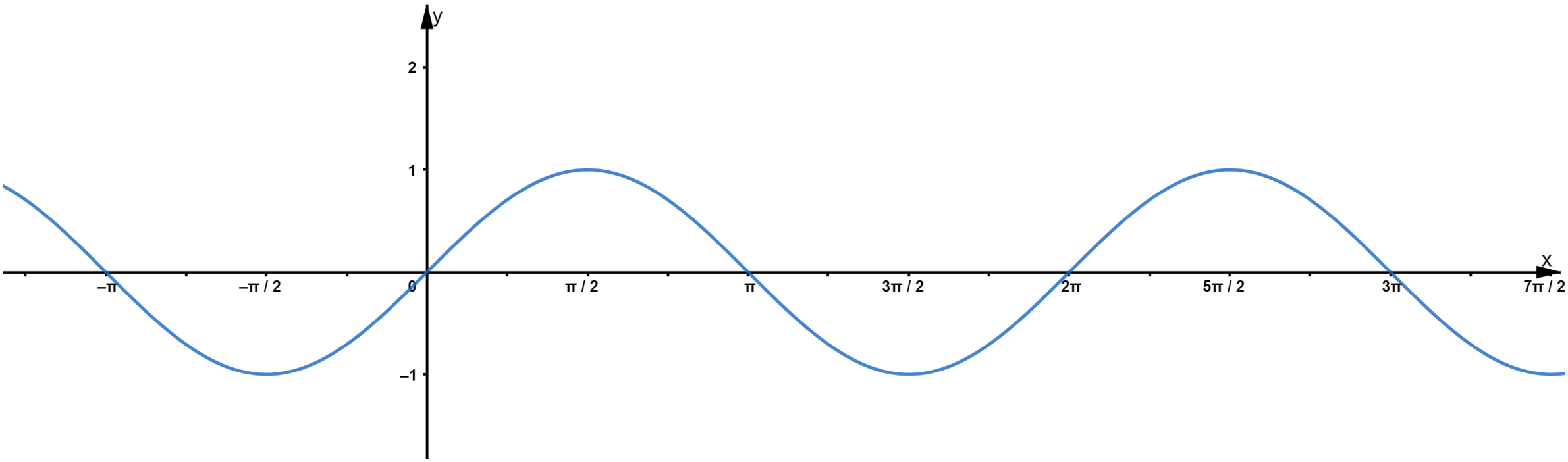
2. $\boxed{y = A \cdot f(|ax + b|) + B}$

сначала модуль (оставить все, что есть при $x > 0$ и симметрично отразить относительно оси Oy), потом сдвиг и растяжение/сжатие/отражение

Пример 1.

Построение графика $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$.

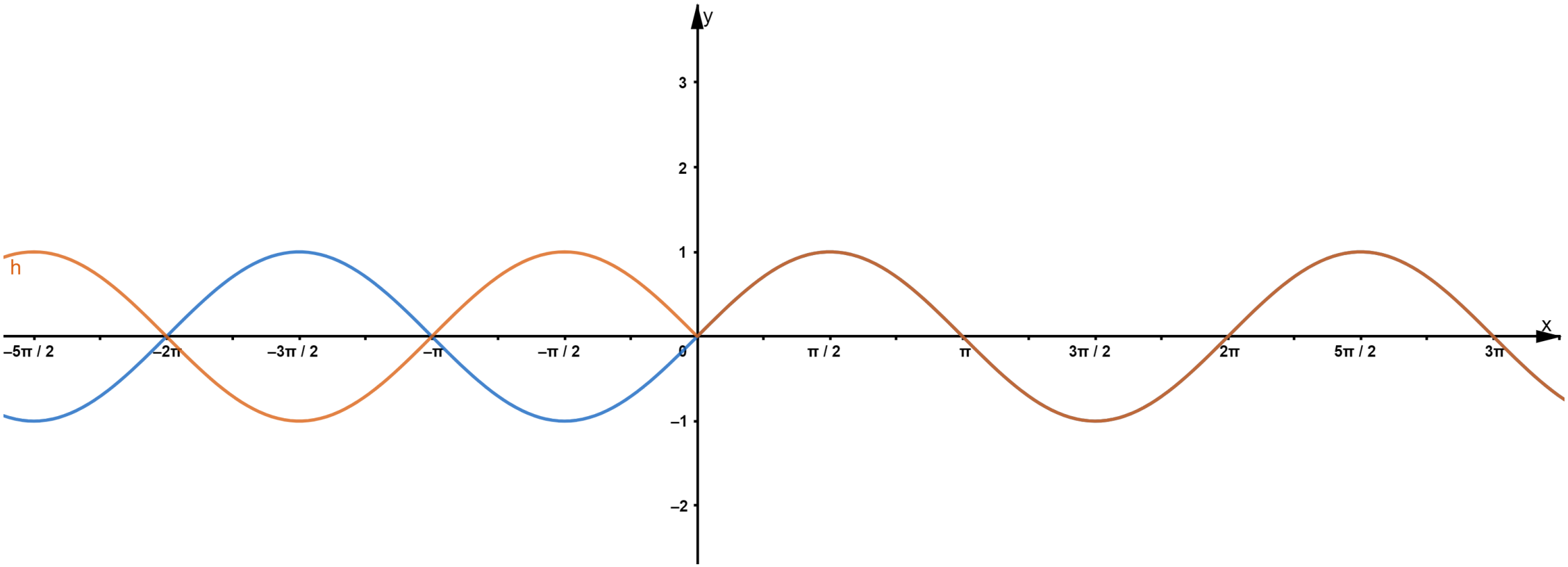
Шаг 1: $y = \sin x$



Пример 1.

Построение графика $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$.

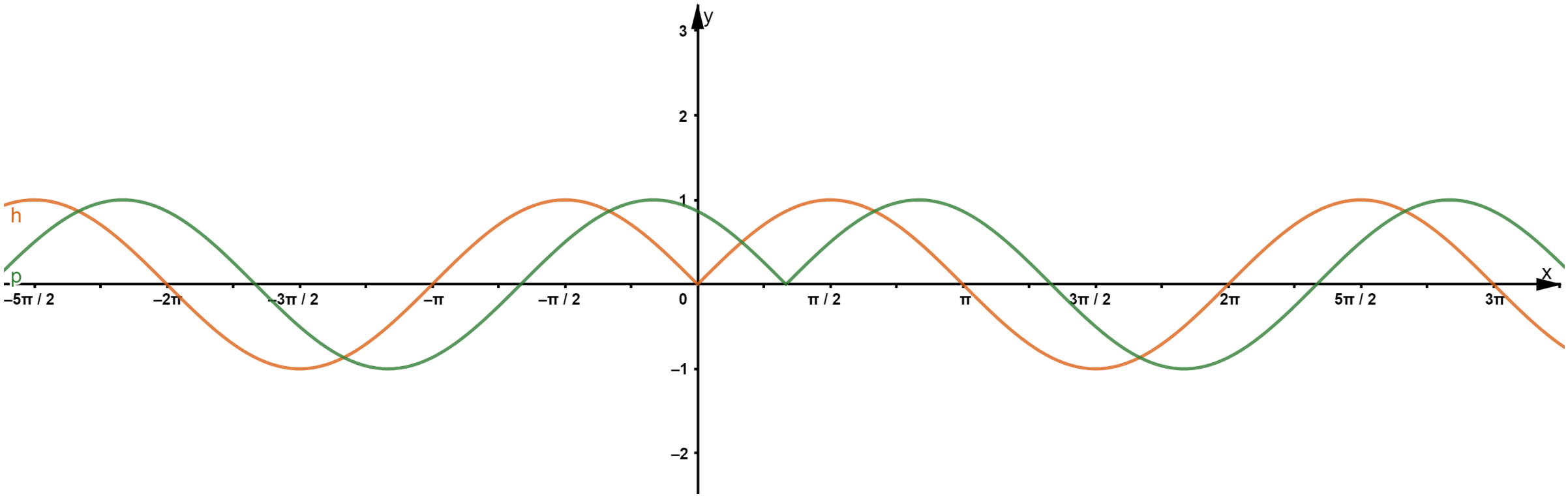
Шаг 2: $y = \sin|x|$. Отражение и обрезка



Пример 1.

Построение графика $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$.

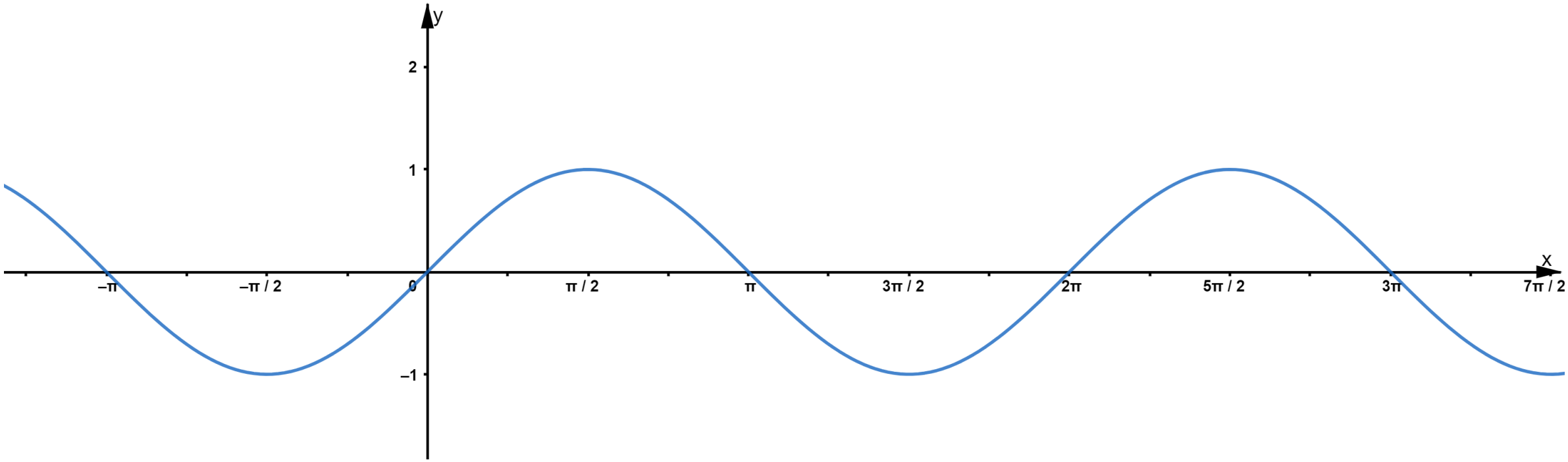
Шаг 3: $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$. Сдвиг



Пример 2.

Построение графика $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right)$.

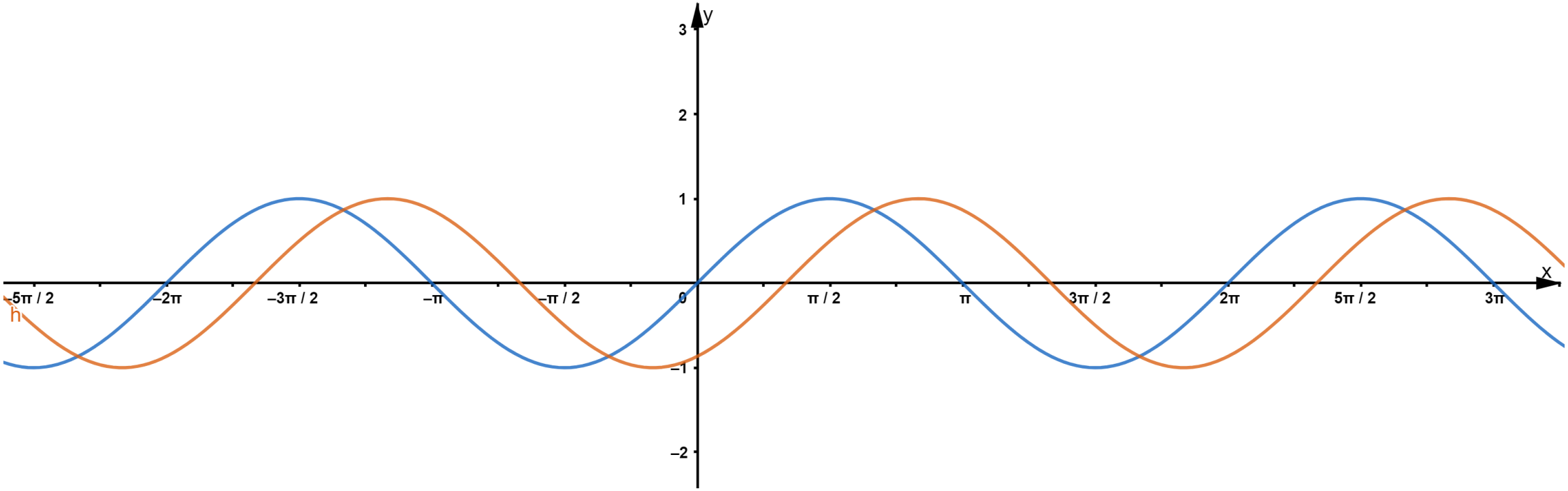
Шаг 1: $y = \sin x$



Пример 2.

Построение графика $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right)$.

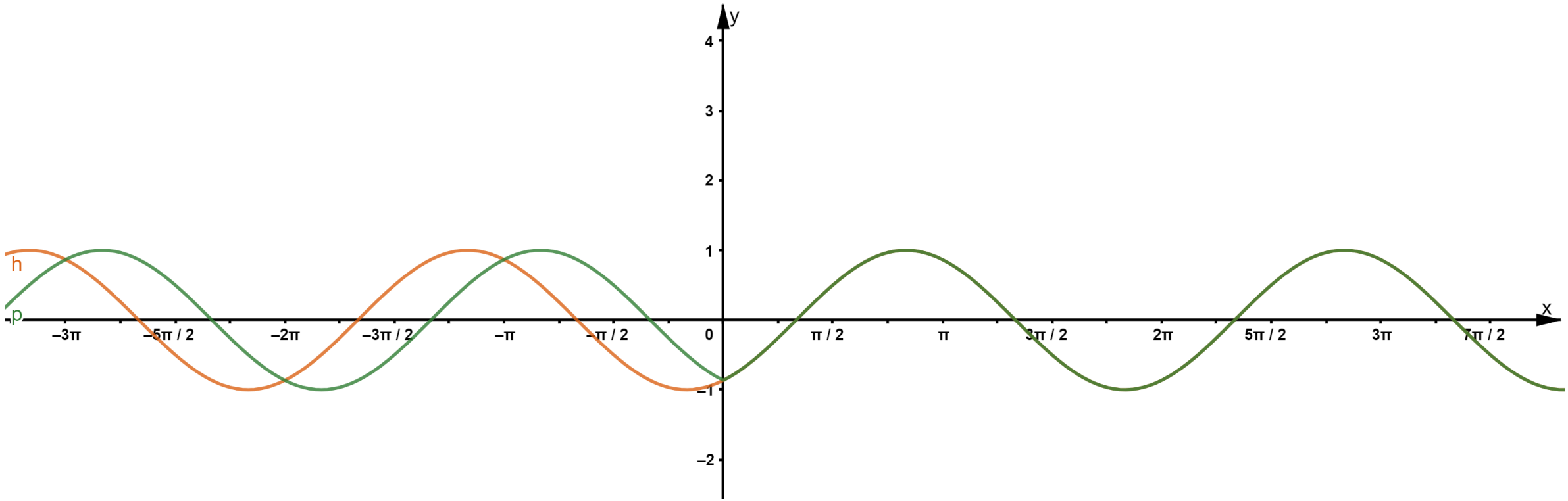
Шаг 2: $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Сдвиг



Пример 2.

Построение графика $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right)$.

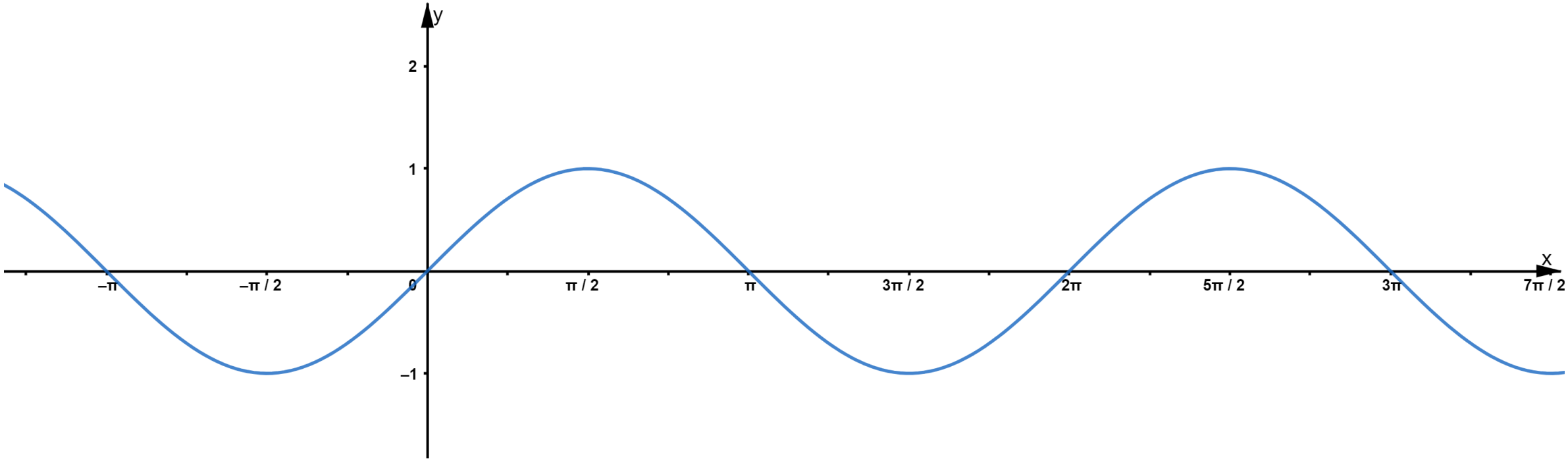
Шаг 3: $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right)$. Отражение и обрезка



Пример 3.

Построение графика $y = 3\sin\left(2\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 1.$

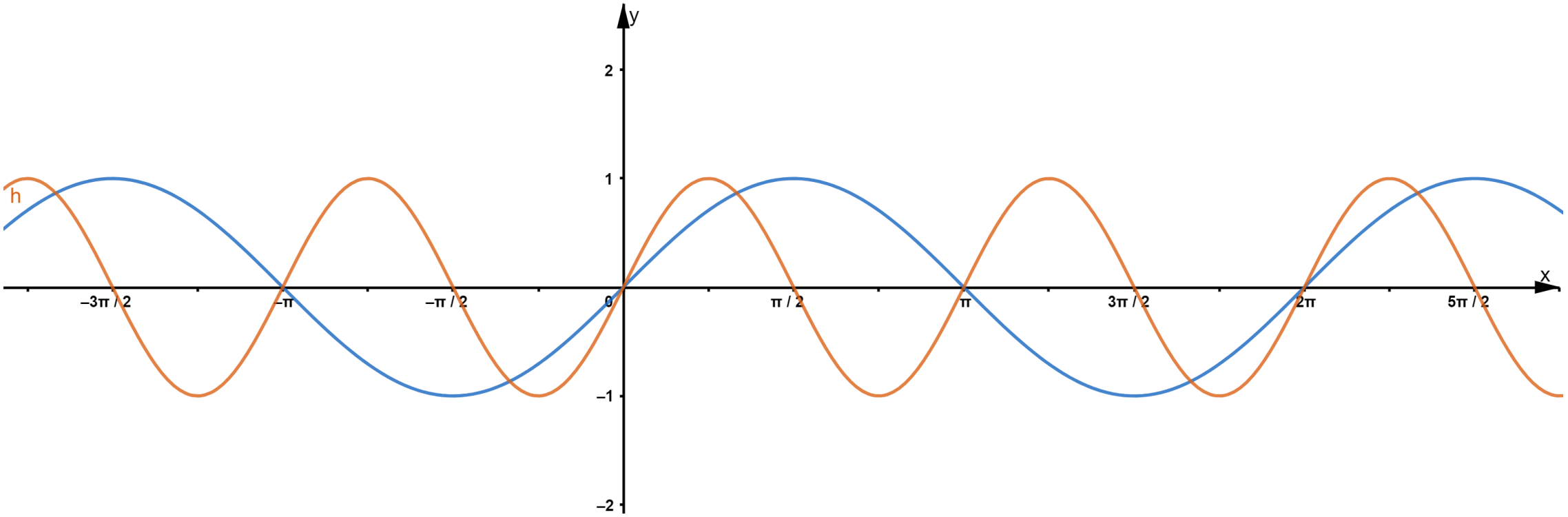
Шаг 1: $y = \sin x$



Пример 3.

Построение графика $y = 3\sin\left(2\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 1.$

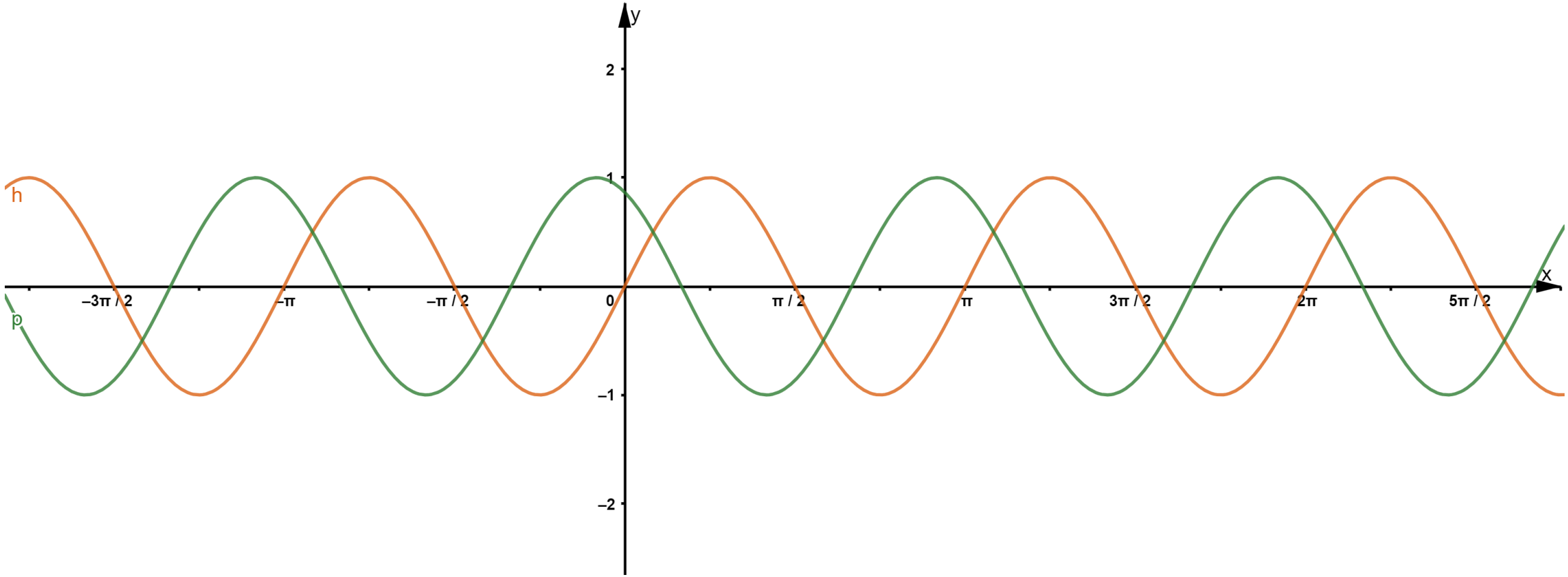
Шаг 2: $y = \sin(2x)$. Сжатие вдоль оси Ox



Пример 3.

Построение графика $y = 3\sin\left(2\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 1.$

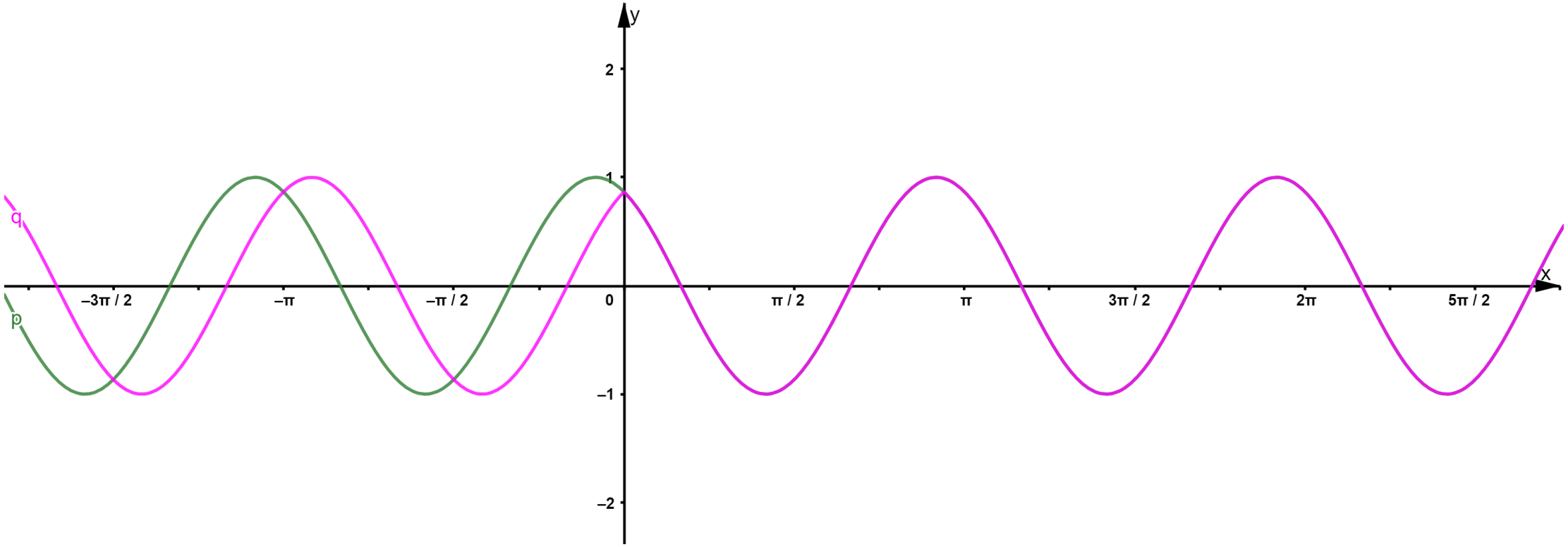
Шаг 3: $y = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Сдвиг вдоль оси Ox



Пример 3.

Построение графика $y = 3\sin\left(2\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 1.$

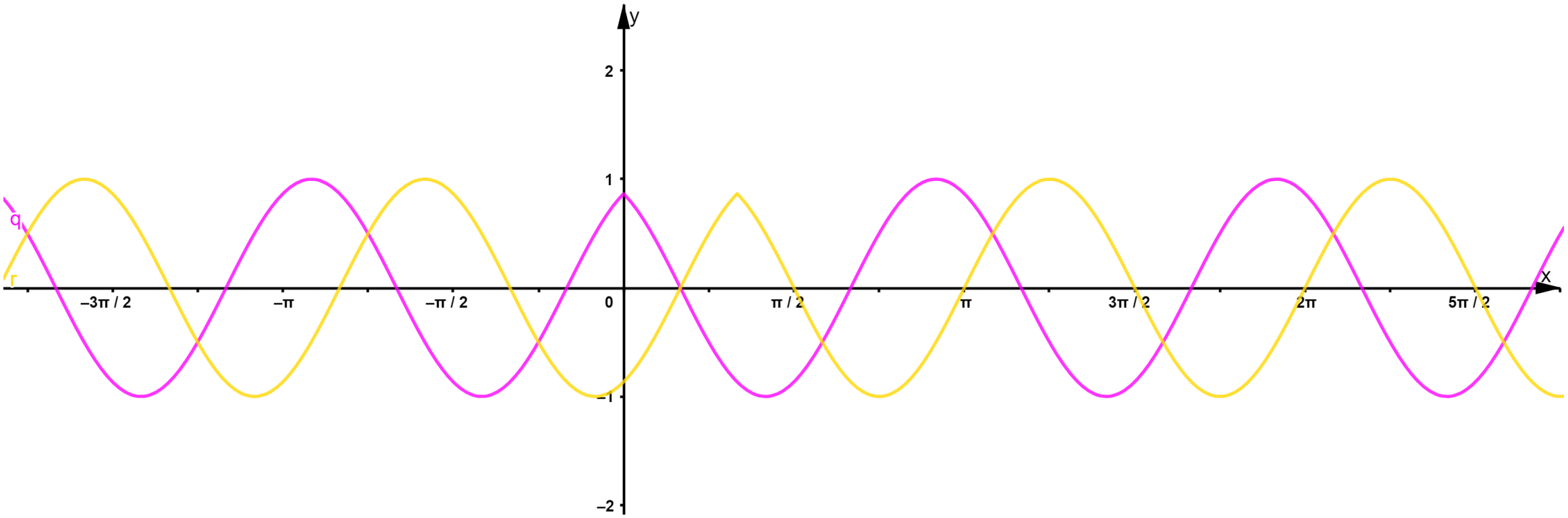
Шаг 4: $y = \sin\left(2\left(|x| + \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Модуль (отражение и обрезка)



Пример 3.

Построение графика $y = 3\sin\left(2\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 1.$

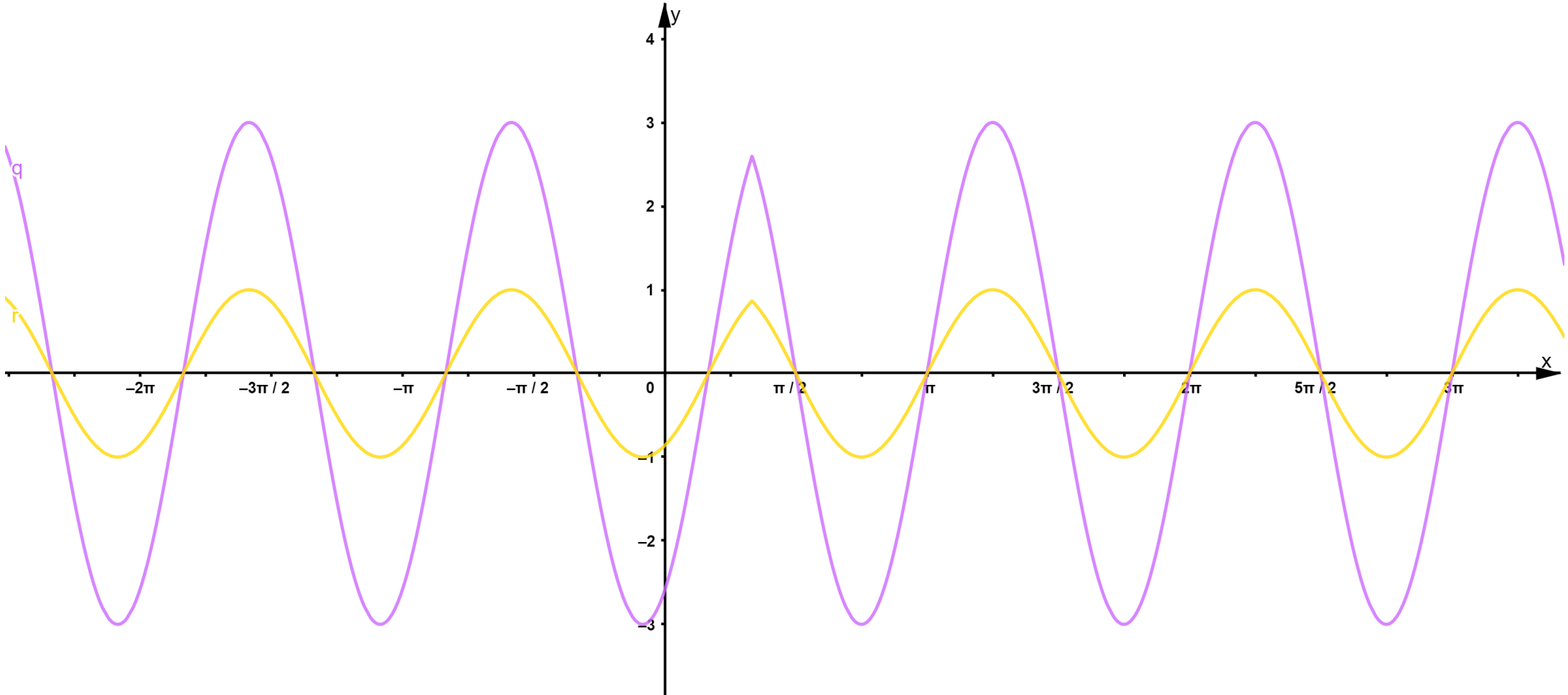
Шаг 5: $y = \sin\left(2\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Сдвиг вдоль оси Ox



Пример 3.

Построение графика $y = 3\sin\left(2\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 1.$

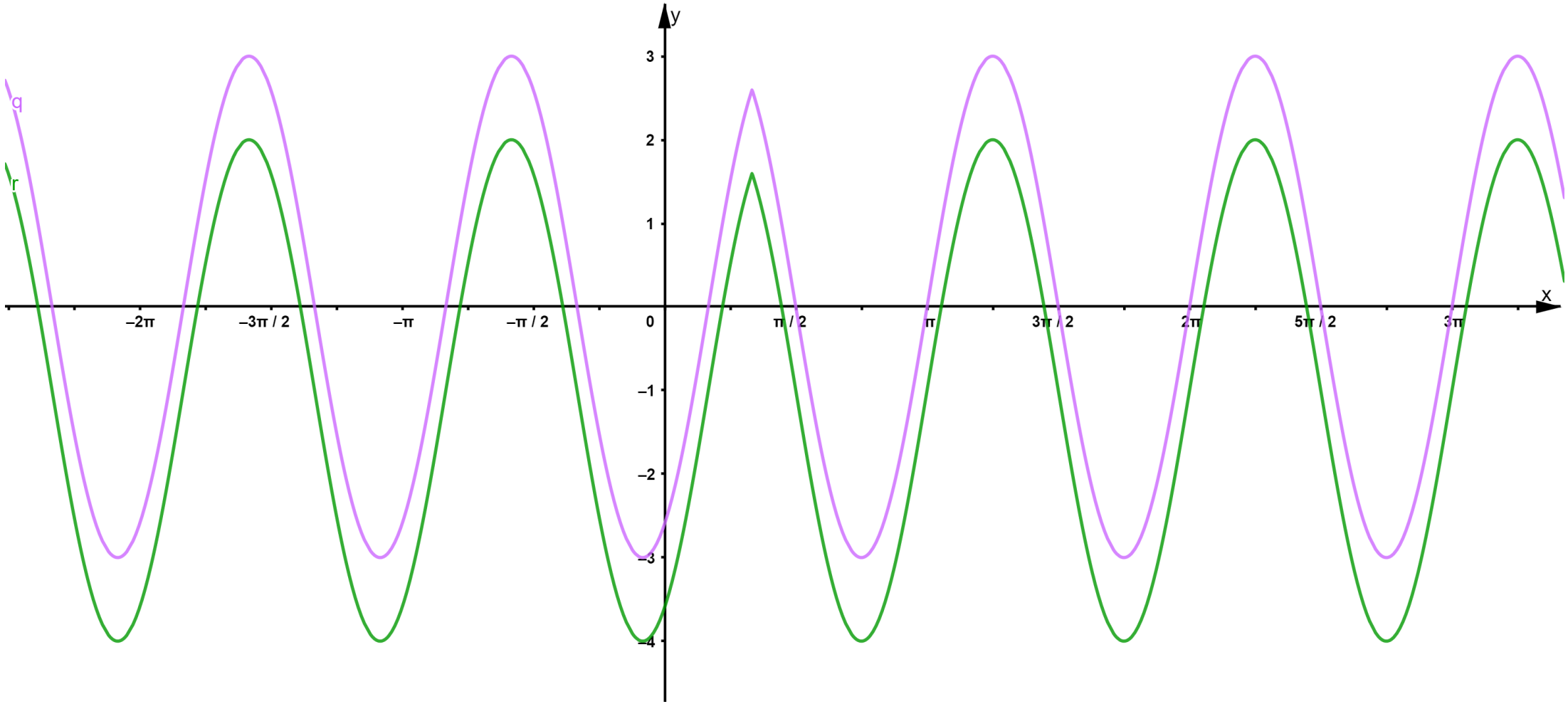
Шаг 6: $y = 3\sin\left(2\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Растяжение вдоль оси оси Oy



Пример 3.

Построение графика $y = 3\sin\left(2\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 1.$

Шаг 7: $\boldsymbol{y = 3\sin\left(2\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 1}$. Сдвиг по оси Oy



Свойства периодических функций

- или $D(f) = \mathbb{R}$, или множество точек разрыва НЕ является конечным
- периодическая функция НЕ может быть монотонна на всей своей области определения
- периодическая функция НЕ может быть непрерывна и неограниченна
- сложная функция (композиция функций) $f\big(g(x)\big)$ периодическая, если $g(x)$ периодическая
- сумма, разность, произведение и частное периодических функций $f_1(x)$ с периодом T_1 и $f_2(x)$ с периодом T_2 есть периодическая функция, если T_1 и T_2 соизмеримы, т.е. если $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$
- для функций вида $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ $\text{НОК}(T_1; T_2)$ - период, но для произведения НЕ обязательно основной
- если функция $f(x)$ - периодическая с периодом T, то функция вида $y = A \cdot f(ax + b) + B$ - периодическая с периодом $\frac{T}{|a|}$

Исследование функций на периодичность

- $y = \frac{\sin x}{x^2 - 1}$

не может быть периодической, т.к. множество точек разрыва конечно

- $y = x^2 \sin x$

не может быть периодической, т.к. непрерывна и неограниченна

- $y = \cos\left(\sqrt{2}\pi x\right) + \sin(\pi x)$

не может быть периодической, т.к. периоды несоизмеримы:

$T_1 = \sqrt{2},\ T_2 = 2,\ \frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$

График функции $y = \frac{\sin x}{x^2 - 1}$

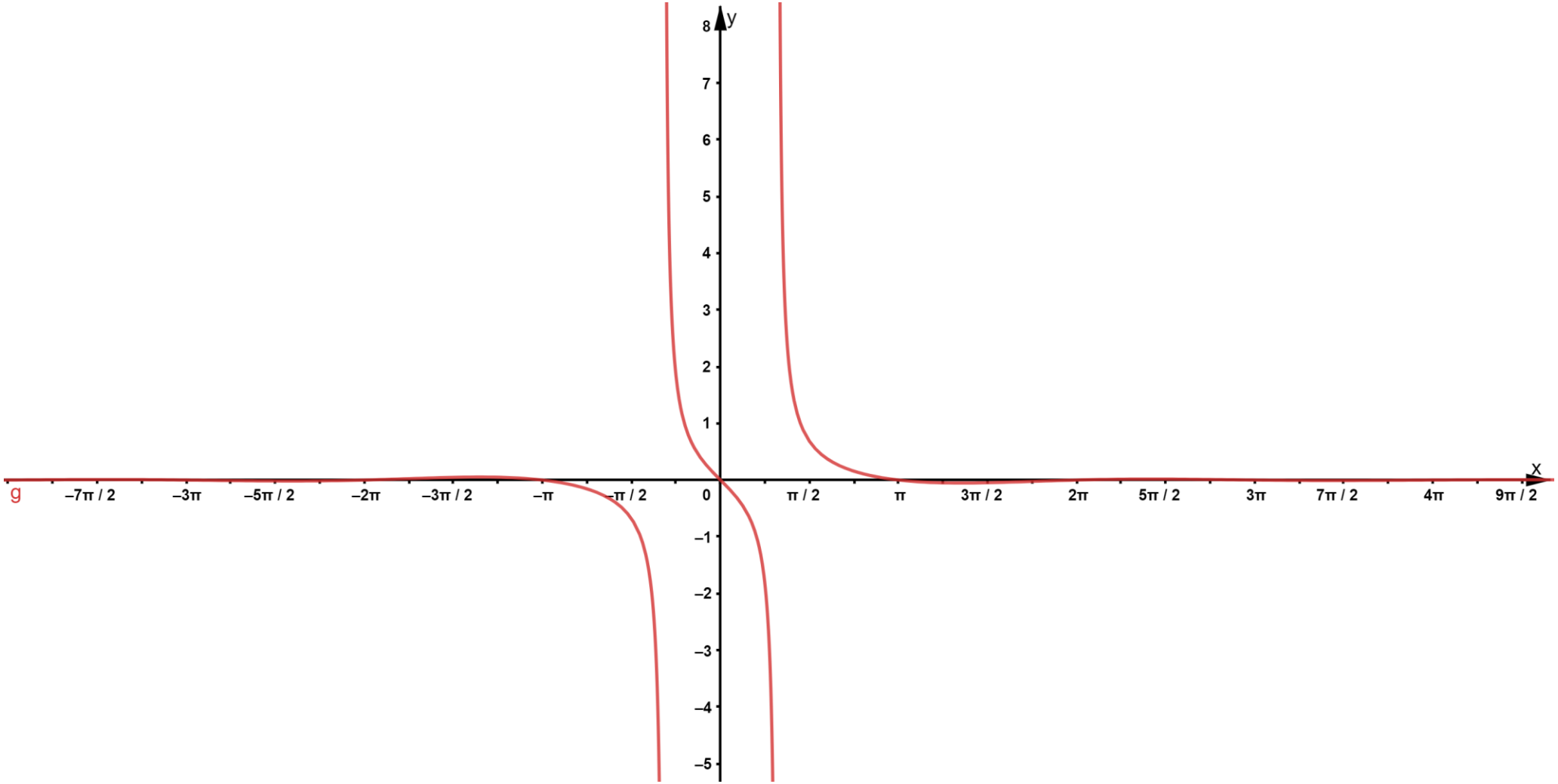


График функции $y = x^2 \sin x$

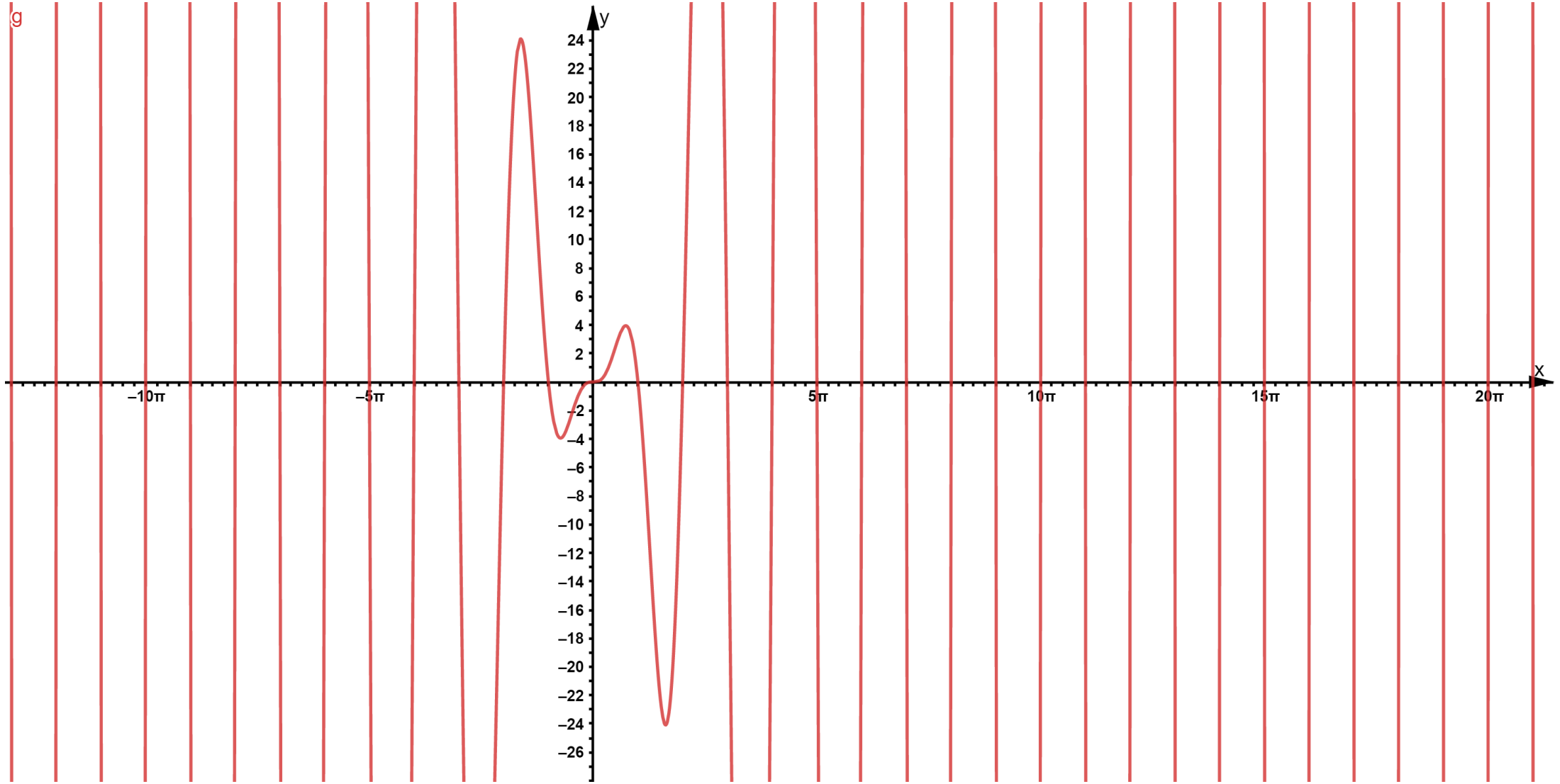


График функции $y = x^2 \sin x$. Пояснение

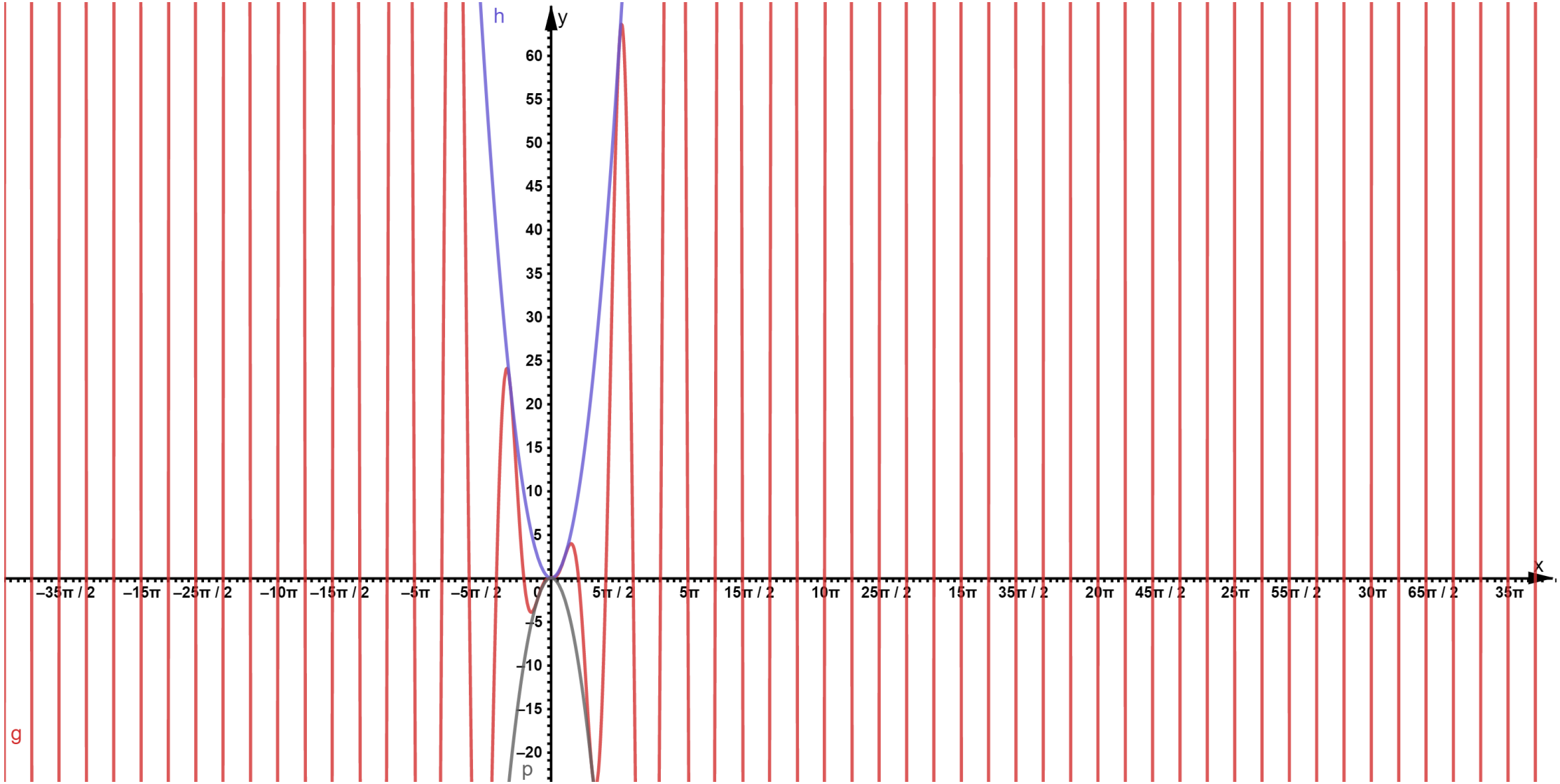
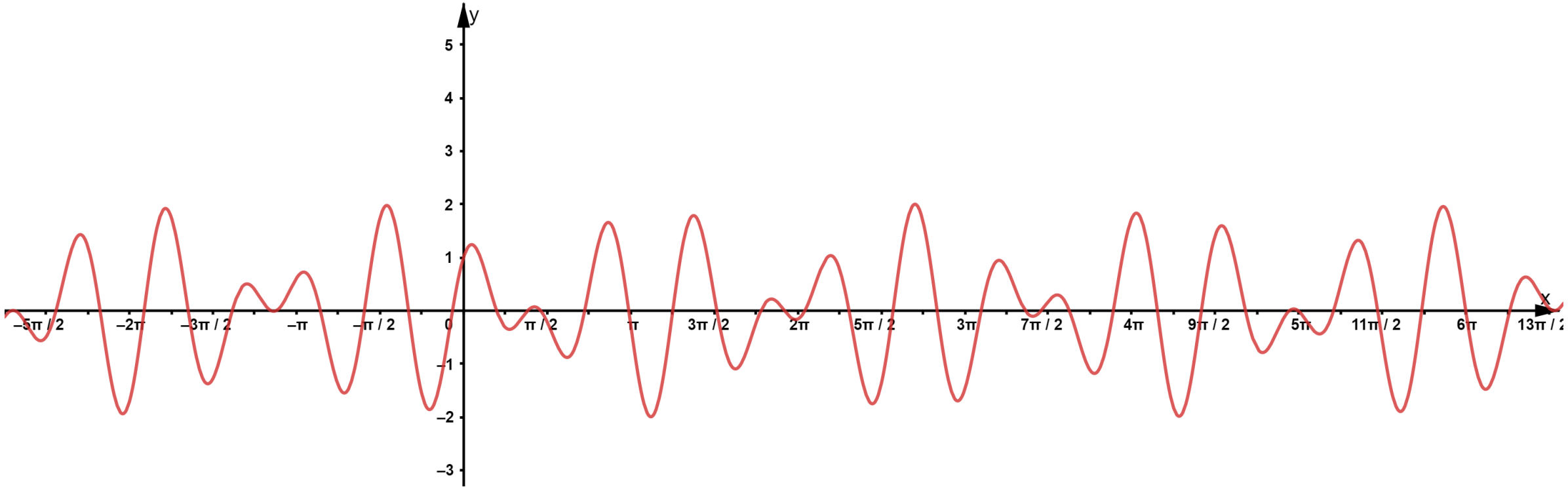


График функции $y = \cos(\sqrt{2}\pi x) + \sin(\pi x)$



Исследование периода функции

- $y = \sin 2x$ — $T = \pi$
- $y = \sin 3x$ — $T = \frac{2\pi}{3}$
- $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ — $T = \frac{2\pi}{3}$
- $y = 5\cos\left(-\frac{x}{2} + \pi\right)$ — $T = 4\pi$
- $y = \sin 2x - \sin 3x$ — $T = \text{НОК}\left(\pi; \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\text{НОК}(3; 2) = \frac{\pi}{3} \cdot 6 = 2\pi$

  $T_1 = \pi,\ T_2 = \frac{2\pi}{3}$
- $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ — $T = \text{НОК}\left(\pi; \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\text{НОК}(3; 2) = \frac{\pi}{3} \cdot 6 = 2\pi$

  $T_1 = \pi,\ T_2 = \frac{2\pi}{3}$
- $y = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{4} + \sin\frac{x}{5}$ — $T = \text{НОК}(T_1; T_2; T_3) = 120\pi$

  $T_1 = 6\pi,\ T_2 = 8\pi, T_3 = 10\pi$

Графики $y = \sin 2x$, $y = \sin 3x$, $y = \sin 2x - \sin 3x$

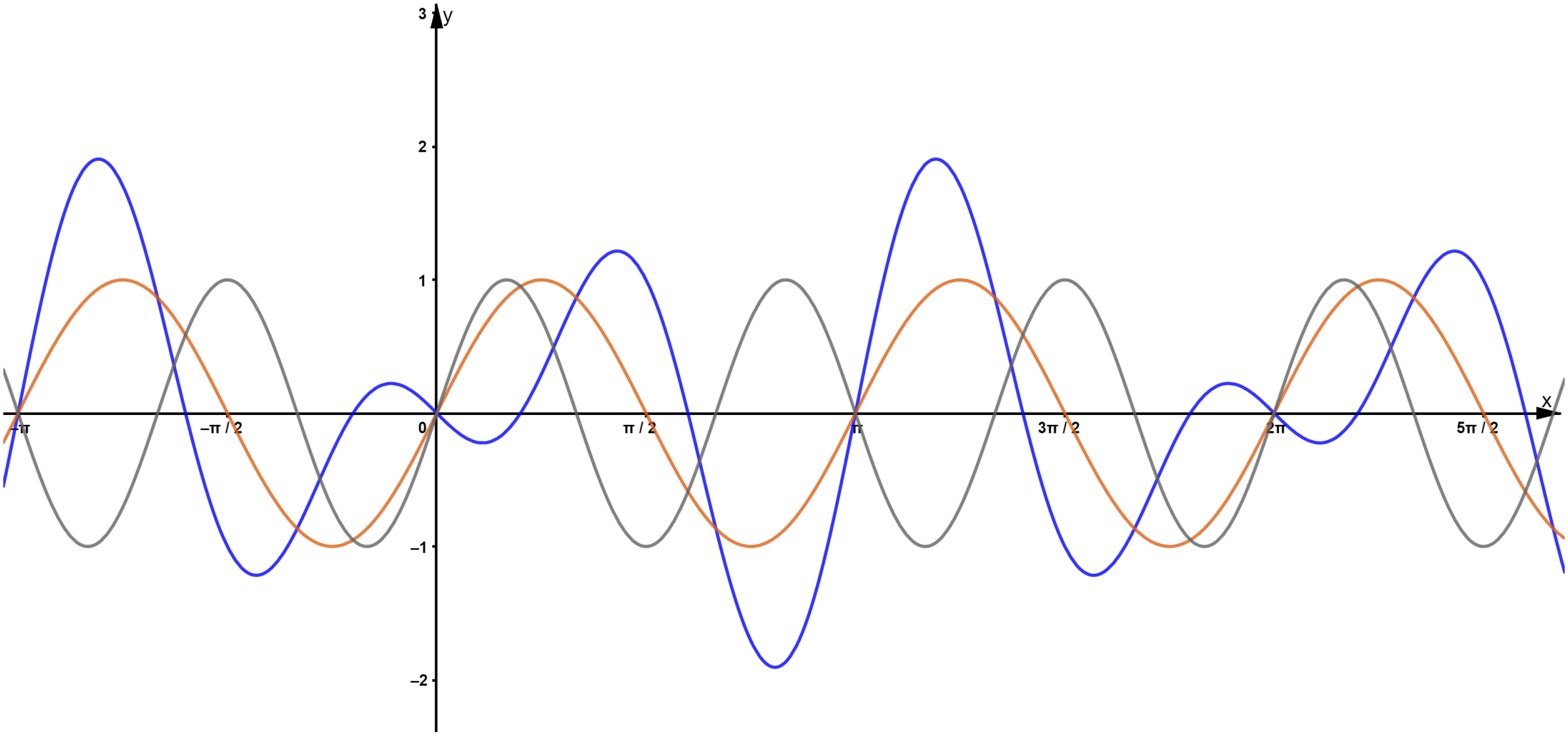
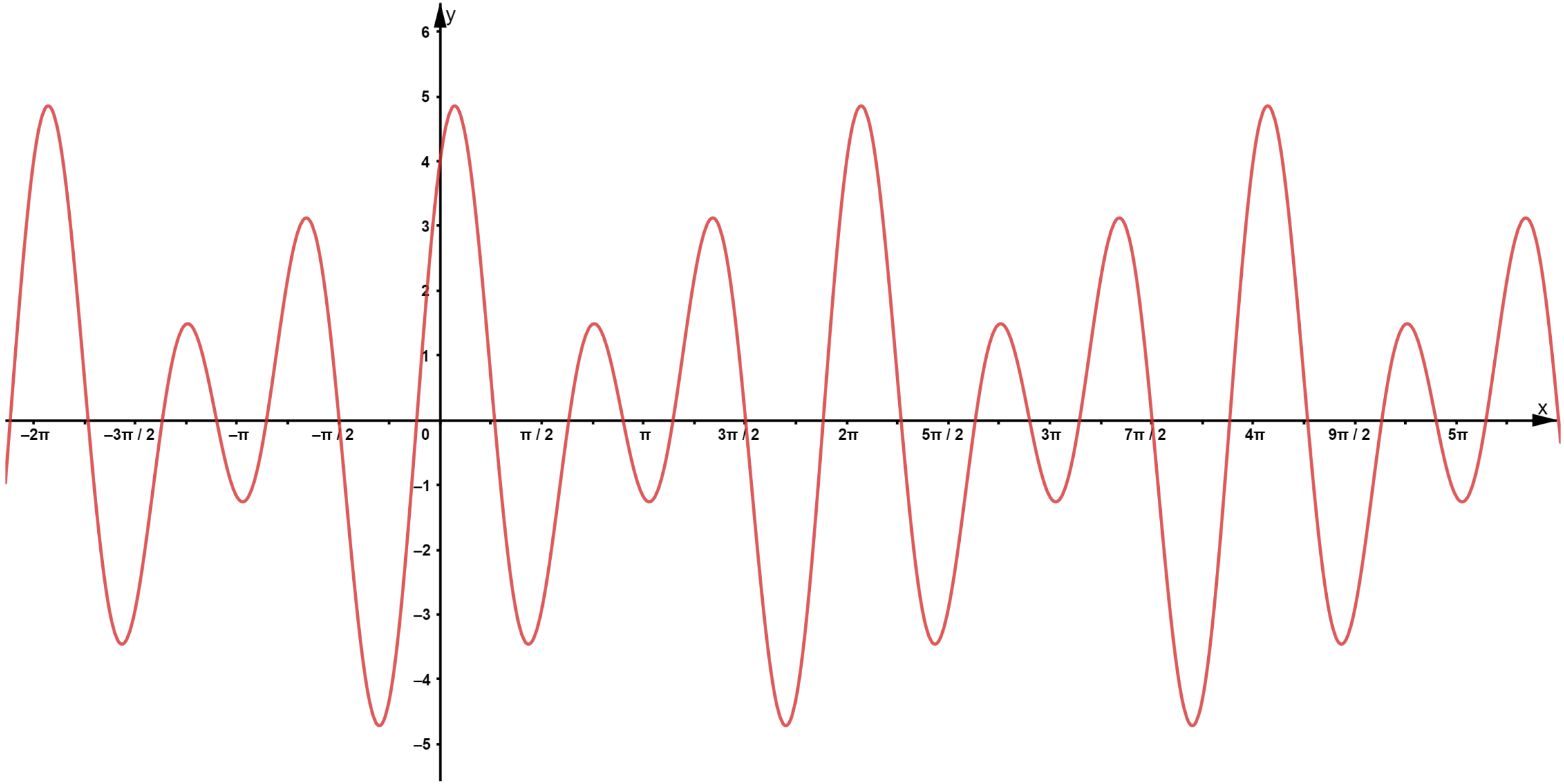


График $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

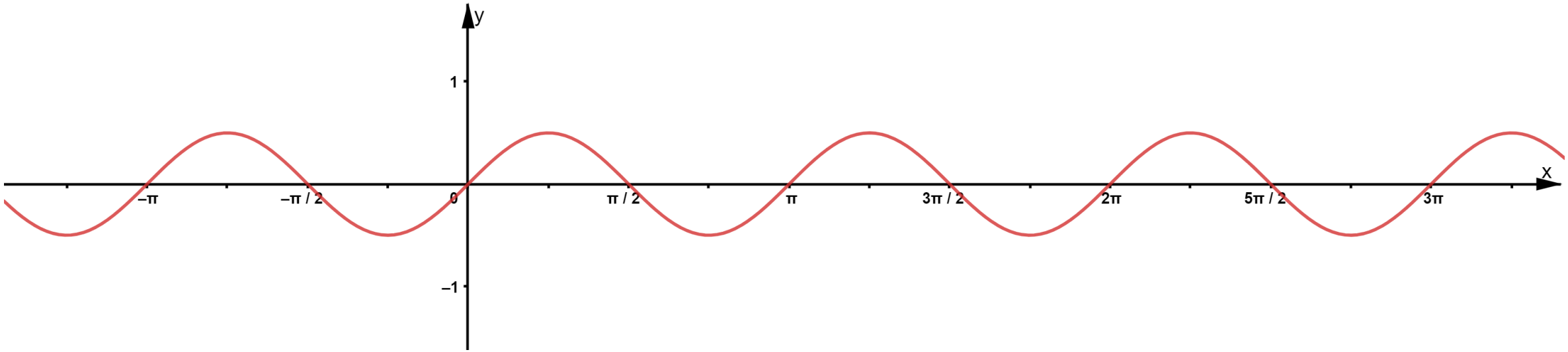


Исследование произведения функций на периодичность. Пример 1

- $y = f(x) = \sin x \cdot \cos x$

  $T_1 = 2\pi,\ T_2 = 2\pi,\ \text{НОК}(T_1; T_2) = 2\pi$ – период, но не основной!

  $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ - основной период π

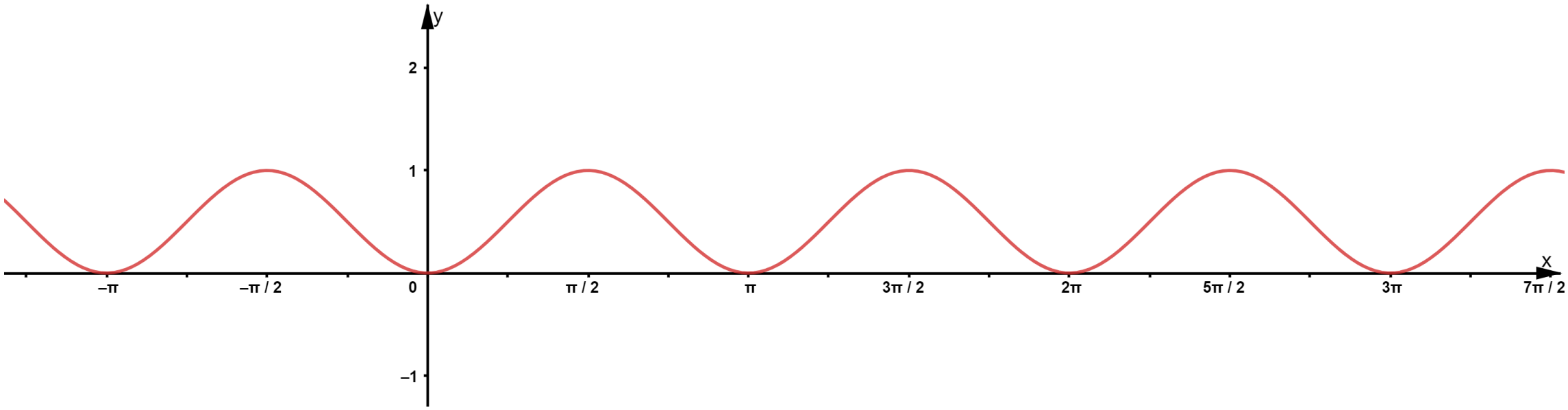


Исследование произведения функций на периодичность. Пример 2

- $y = f(x) = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$

  $T_1 = 2\pi,\ T_2 = 2\pi,\ \text{НОК}(T_1; T_2) = 2\pi$ – период, но не основной!

  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ - основной период π



Необычные примеры

- Периодическая, но не тригонометрическая функция:

  $y = \{x\}$

- Периодические функции без основного периода:
  - $y = const$

  (периодом является произвольное, отличное от 0 число)
  - Функция Дирихле $y = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

  (периодом является произвольное рациональное, отличное от 0, число)