

Исследование
тригонометрических функций.
Построение графиков.
Продолжение

Исследование области определения. Примеры

$$1. \quad f(x) = \frac{1}{\sin 3x - 3}$$

$$D(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$2. \quad g(x) = \frac{1}{\sin 3x}$$

$$\sin 3x \neq 0$$

$$3x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Исследование области определения. Примеры

$$3. \quad t(x) = \frac{1}{\sin 3x - \cos 3x}$$

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$$

$$3x - \frac{\pi}{4} \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$D(t) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Исследование области определения. Примеры

$$4. \quad q(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$D(q) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$5. \quad h(x) = \sqrt{\sin 3x}$$

$$\sin 3x \geq 0$$

$$3x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$$

$$D(h): \quad x \in \left[\frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \right], k \in \mathbb{Z}$$

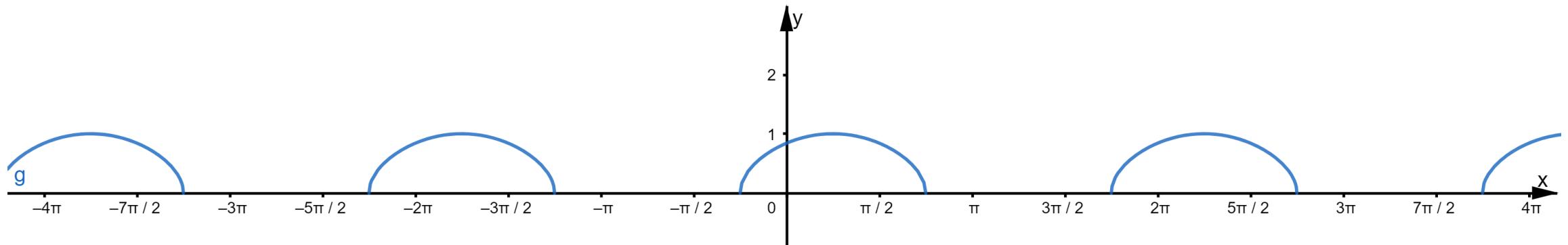
Исследование области определения. Примеры

$$6. \quad w(x) = \sqrt{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$$

$$x + \frac{\pi}{4} \in [2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$$

$$D(w): x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$



Исследование области определения. Примеры

$$7. \quad s(x) = 4\sqrt{\cos 2x} - 3\sqrt{\tg 2x}$$

$$\begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \tg 2x \geq 0 \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2x \in [2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$D(s): x \in [\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Исследование области значения. Примеры

$$1. \quad f(x) = 3 \cos 2x - 1$$

$$E(\cos 2x) = [-1; 1]$$

$$E(3\cos 2x) = [-3; 3]$$

$$E(f) = E(3\cos 2x - 1) = [-4; 2]$$

$$2. \quad g(x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x - 1$$

$$g(x) = \cos 2x - 1$$

$$E(g) = [-2; 0]$$

Исследование области значения. Примеры

$$3. \quad h(x) = 2 - 3 \left| \sin \frac{x}{2} \right|$$

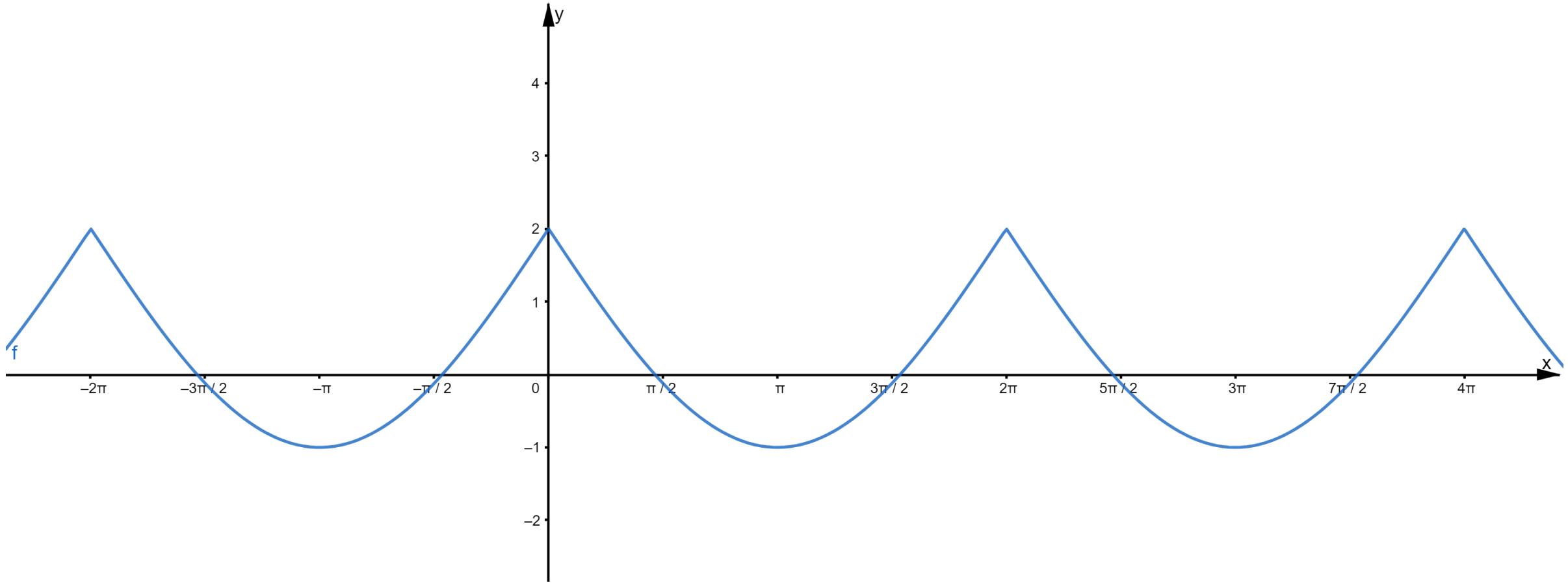
$$E \left(\sin \frac{x}{2} \right) = [-1; 1]$$

$$E \left(\left| \sin \frac{x}{2} \right| \right) = [0; 1]$$

$$E \left(-3 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \right) = [-3; 0]$$

$$E(h) = E \left(2 - 3 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \right) = [-1; 2]$$

График функции $h(x) = 2 - 3 \left| \sin \frac{x}{2} \right|$



Исследование области значения. Примеры

$$4. \quad w(x) = \left| 2 - 3 \sin \frac{x}{2} \right|$$

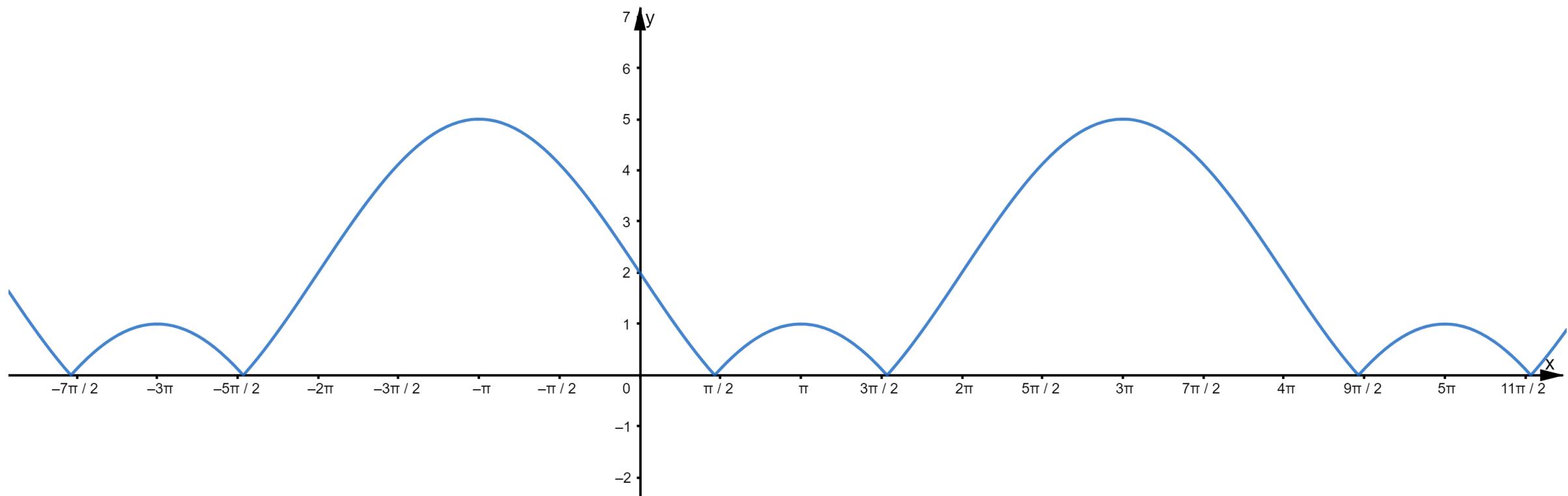
$$E \left(\sin \frac{x}{2} \right) = [-1; 1]$$

$$E \left(-3 \sin \frac{x}{2} \right) = [-3; 3]$$

$$E \left(2 - 3 \sin \frac{x}{2} \right) = [-1; 5]$$

$$E(w) = E \left(\left| 2 - 3 \sin \frac{x}{2} \right| \right) = [0; 5]$$

График функции $w(x) = \left|2 - 3 \sin \frac{x}{2}\right|$



Исследование области значения. Примеры

$$5. \quad s(x) = \left| 2 \sin \frac{x}{2} - 3 \right|$$

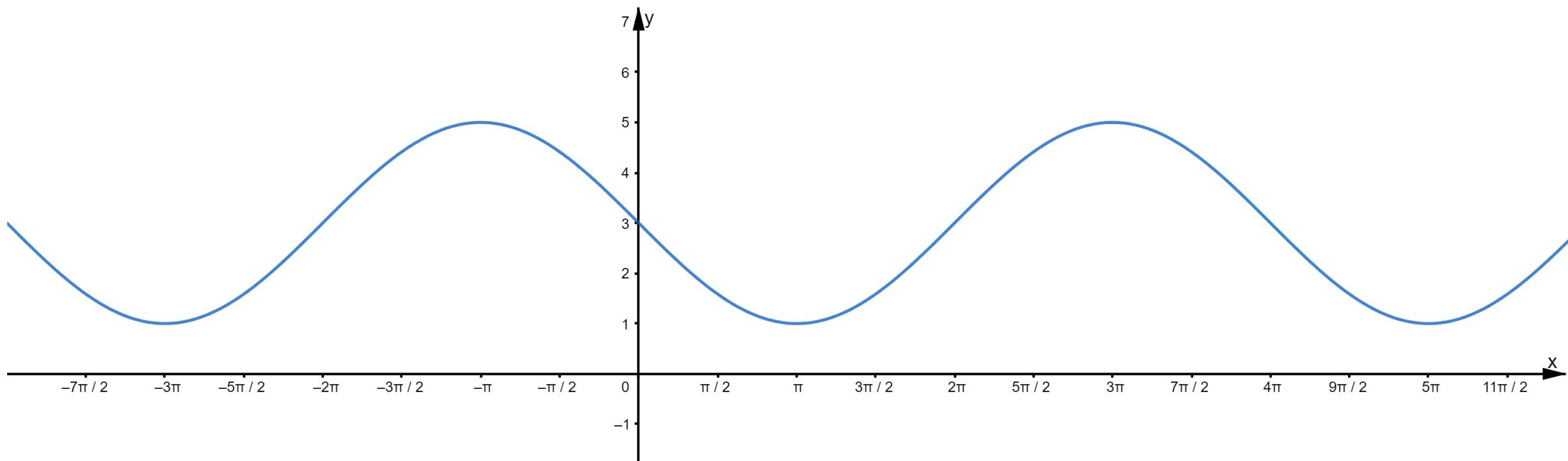
$$E \left(\sin \frac{x}{2} \right) = [-1; 1]$$

$$E \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) = [-2; 2]$$

$$E \left(2 \sin \frac{x}{2} - 3 \right) = [-5; -1]$$

$$E(s) = E \left(\left| 2 \sin \frac{x}{2} - 3 \right| \right) = [1; 5]$$

График функции $s(x) = \left| 2 \sin \frac{x}{2} - 3 \right|$



Исследование области значения. Примеры

$$6. \quad v(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$E(v) = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

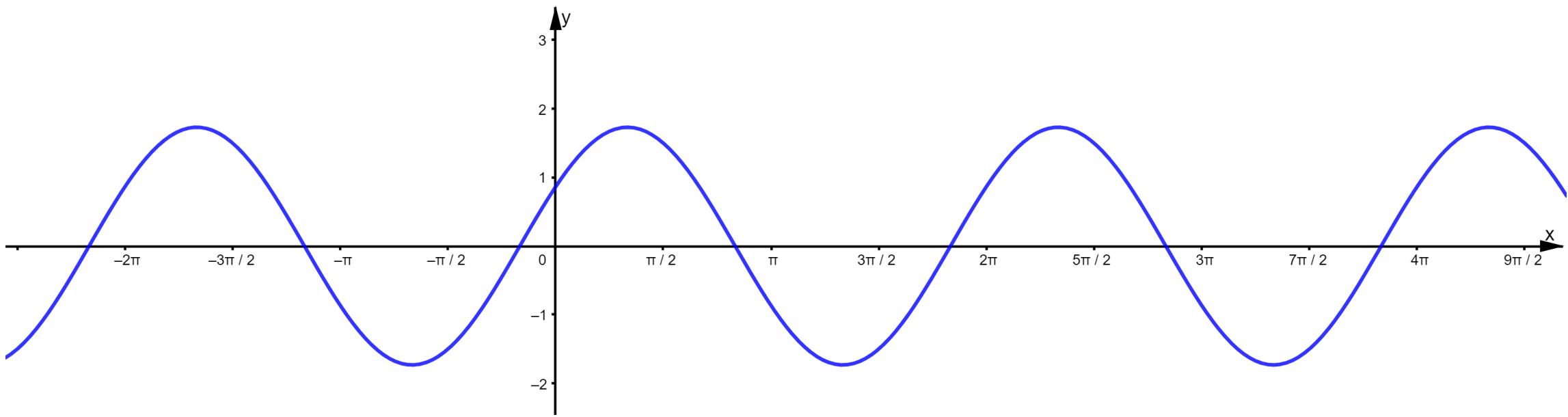
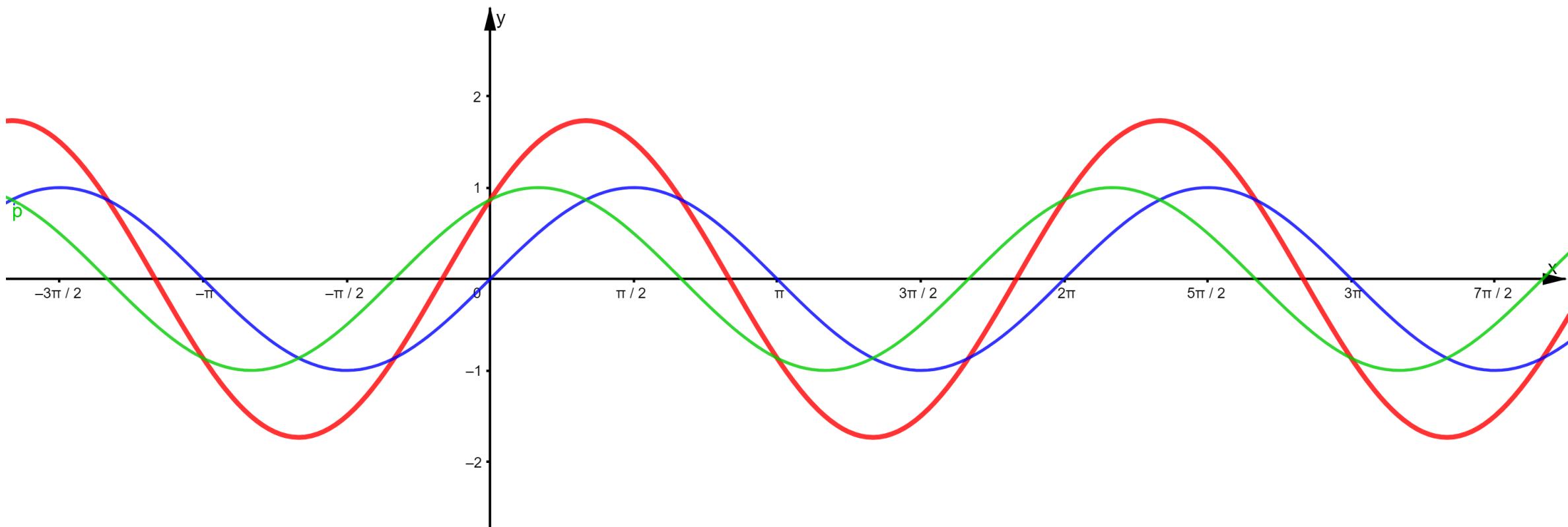
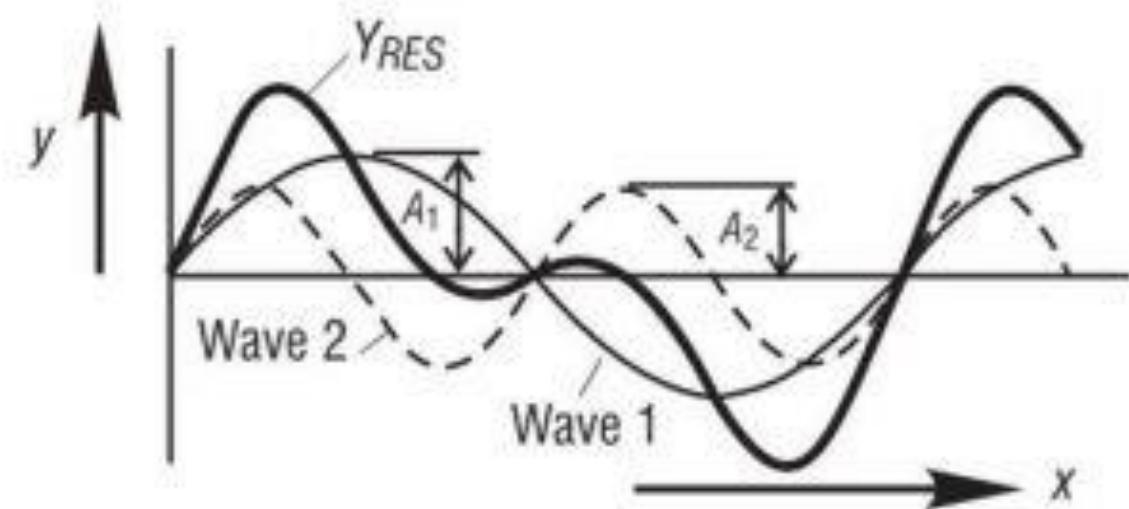
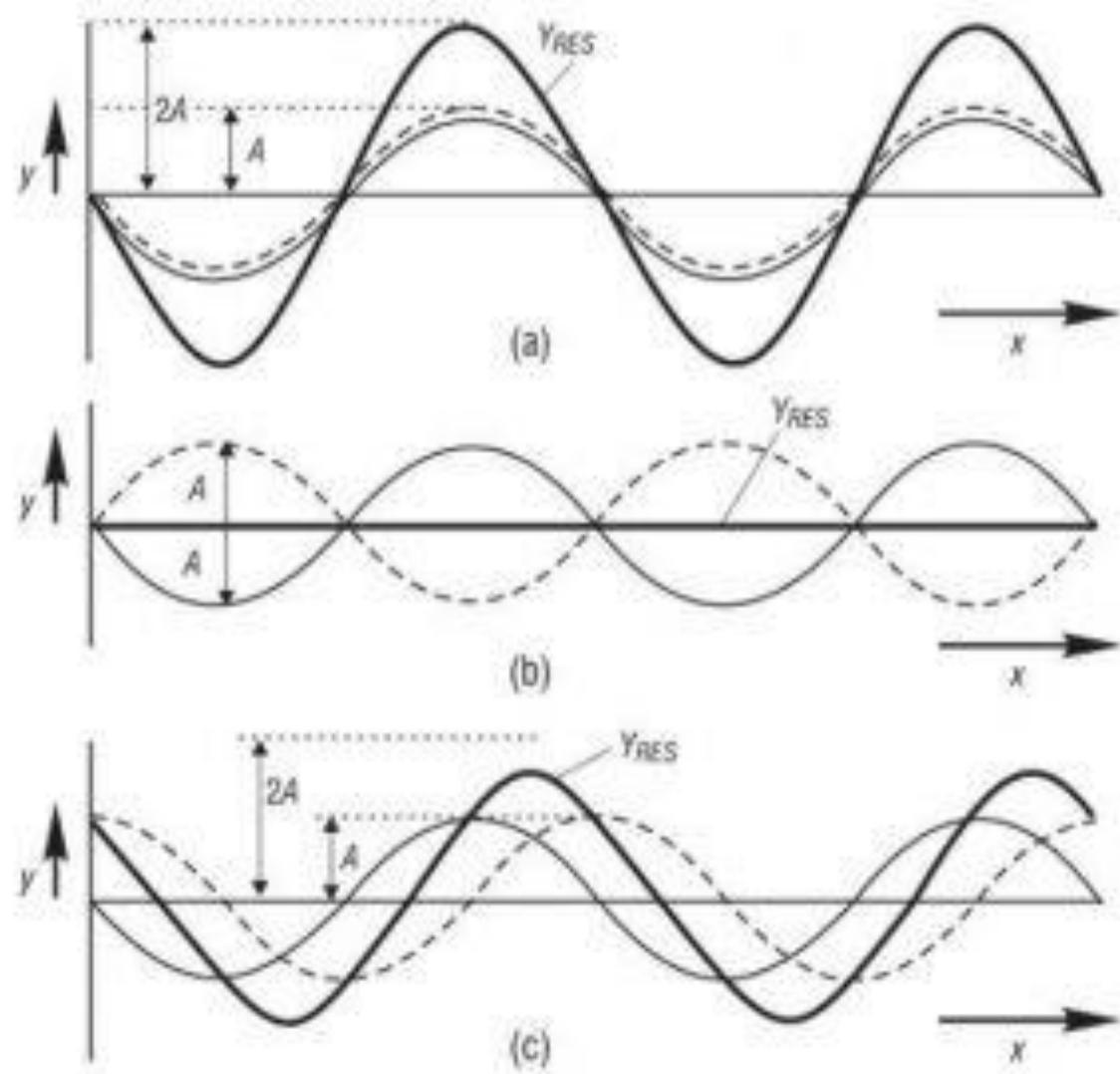


График функции $v(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Сложение гармонических колебаний



Сложение гармонических колебаний



Исследование области значения. Примеры

$$7. \quad t(x) = -\sin \frac{x}{3} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{3}$$

$$t(x) = 2 \sin \left(\frac{x}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3} \right) = 2 \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$E(t) = [-2; 2]$$

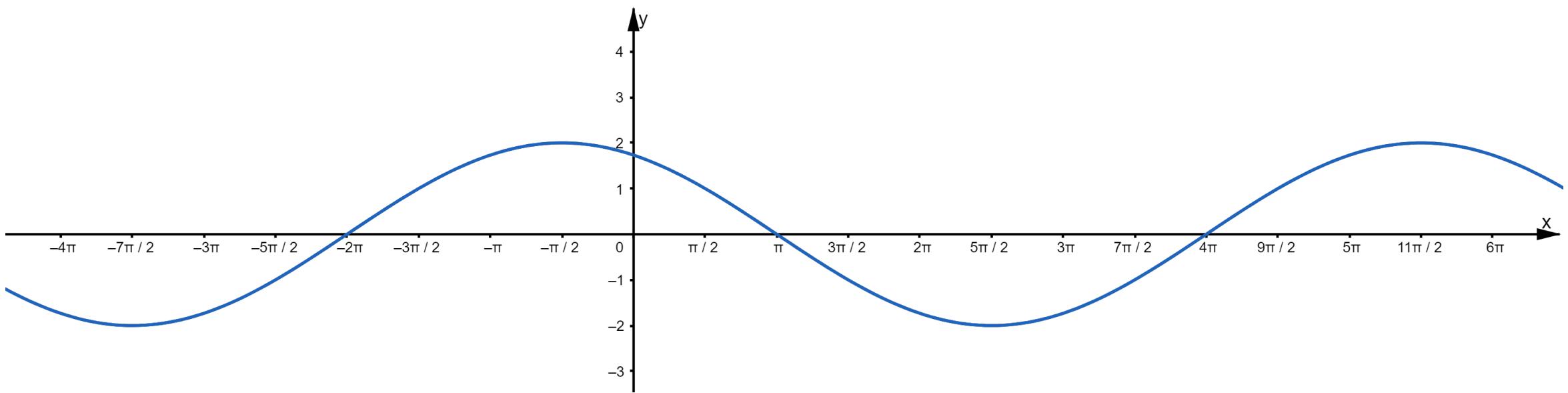
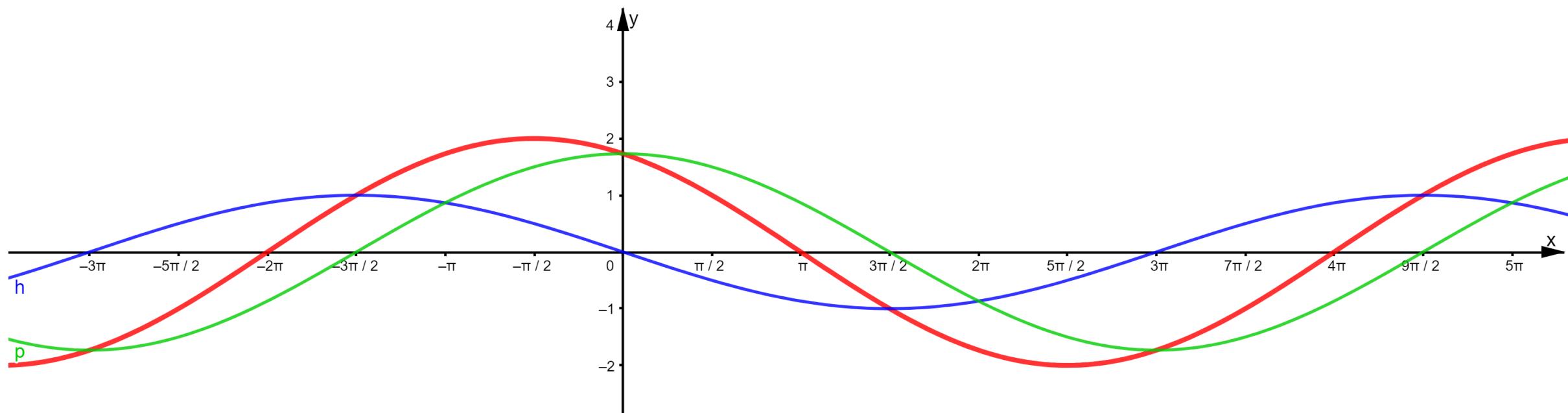


График функции $t(x) = -\sin \frac{x}{3} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{3}$

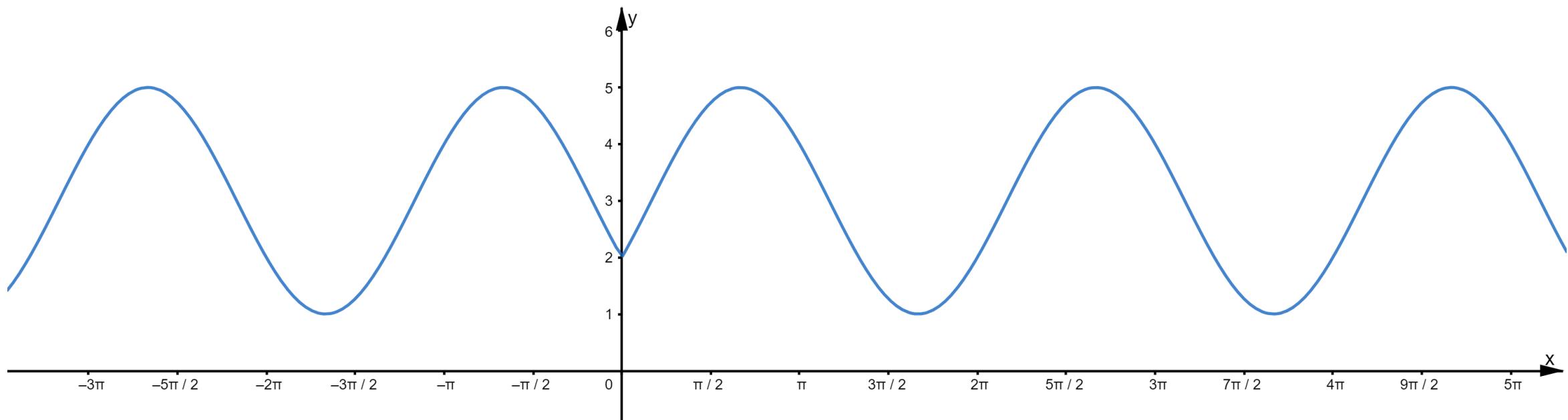


Исследование области значения. Примеры

$$8. \quad q(x) = 3 + \sqrt{3} \sin|x| - \cos|x|$$

$$q(x) = 3 + 2 \sin\left(|x| - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$E(q) = [1; 5]$$



Исследование области значения. Примеры

9. $z(x) = \sin^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \cos x$

$$z(x) = -4 \cos^2 x + 2 \cos x + 1$$

$$t = \cos(x) \in [-1; 1]$$

Найдем минимальное и максимальное значение функции

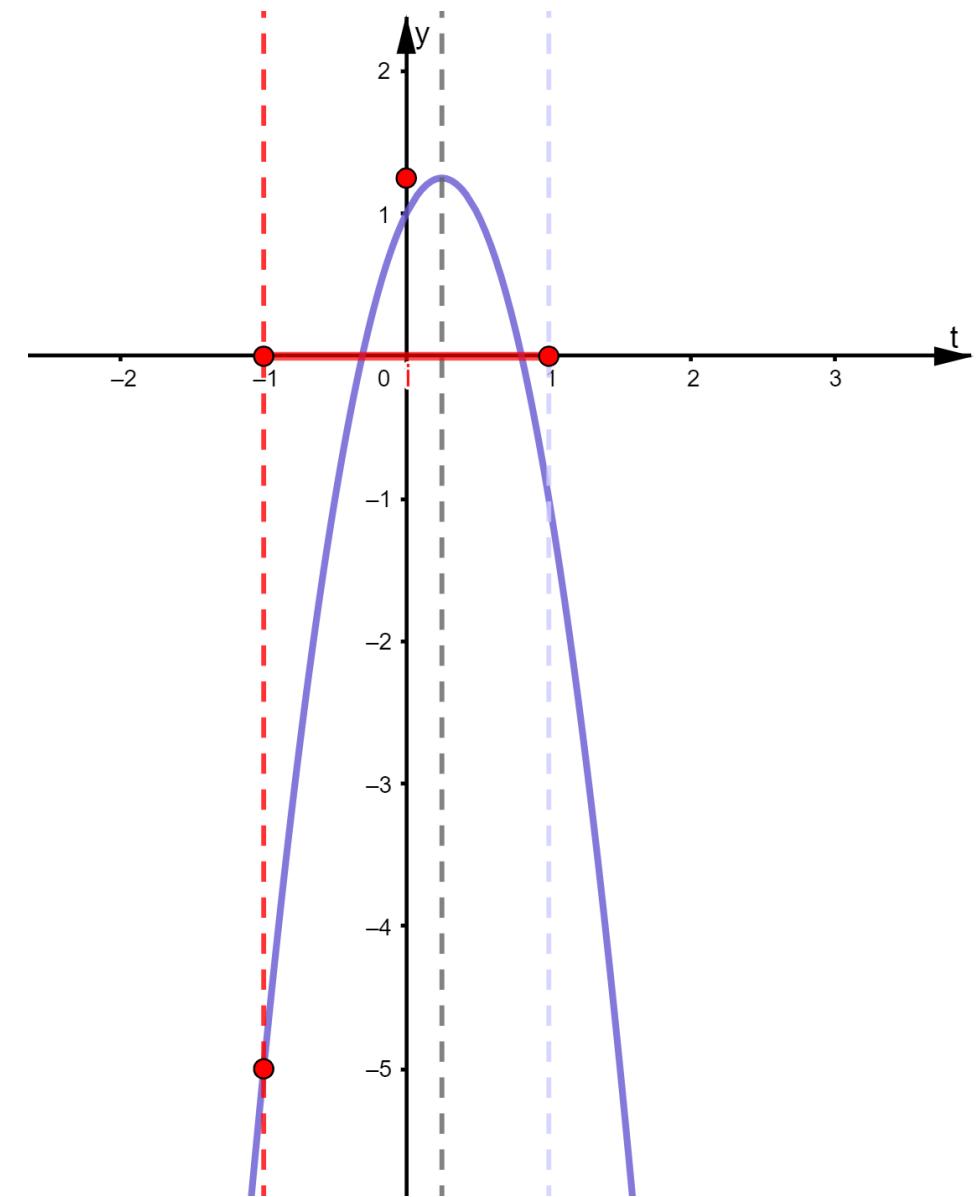
$y = -4t^2 + 2t + 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

Это парабола, ветви вниз, $y = -4 \left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{4}$

Значит, $t_{\text{в}} = \frac{1}{4} \in [-1; 1]$

$$y_{\max} = y(t_{\text{в}}) = \frac{5}{4} \quad y_{\min} = y(-1) = -5$$

$$E(z) = \left[-5; \frac{5}{4}\right]$$



Исследование области значения. Примеры

10. $r(x) = 4 \cos^2 x + 3\sqrt{3} \sin x + 7 \sin^2 x$

$$r(x) = 3 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x + 4$$

$$t = \sin(x) \in [-1; 1]$$

Найдем минимальное и максимальное значение функции

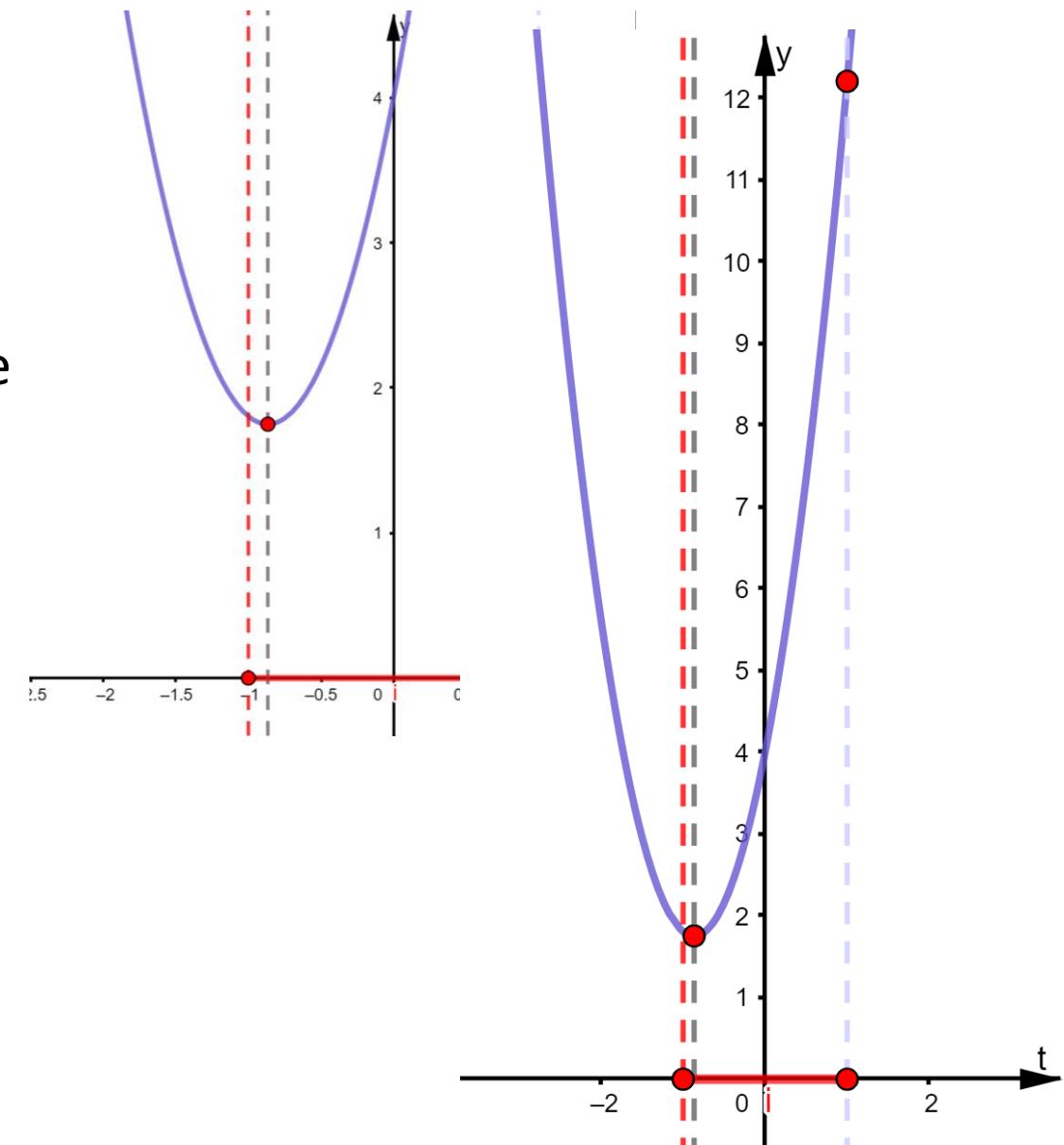
$$y = 3t^2 + 3\sqrt{3}t + 4 \text{ на отрезке } [-1; 1].$$

Это парабола, ветви вверх, $y = 3\left(t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

$$\text{Значит, } t_{\text{в}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$$

$$y_{\min} = y(t_{\text{в}}) = \frac{7}{4} \quad y_{\max} = y(1) = 7 + 3\sqrt{3}$$

$$E(r) = \left[\frac{7}{4}; 7 + 3\sqrt{3}\right]$$



Исследование области значения. Примеры

$$11. \ u(x) = \cos 3x + \sqrt{\cos^2 3x - 1}$$

$$u(x) = \cos 3x + \sqrt{-\sin^2 3x}$$

$$\sin 3x = 0$$

$$3x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$D(u) = \left\{ \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$E(u) = \{-1; 1\} = \{-1\} \cup \{1\}$$

Нахождение нулей функции

$$1. \quad f(x) = \sin^2 x - \sin x$$

$$f(x) = \sin x (\sin x - 1)$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

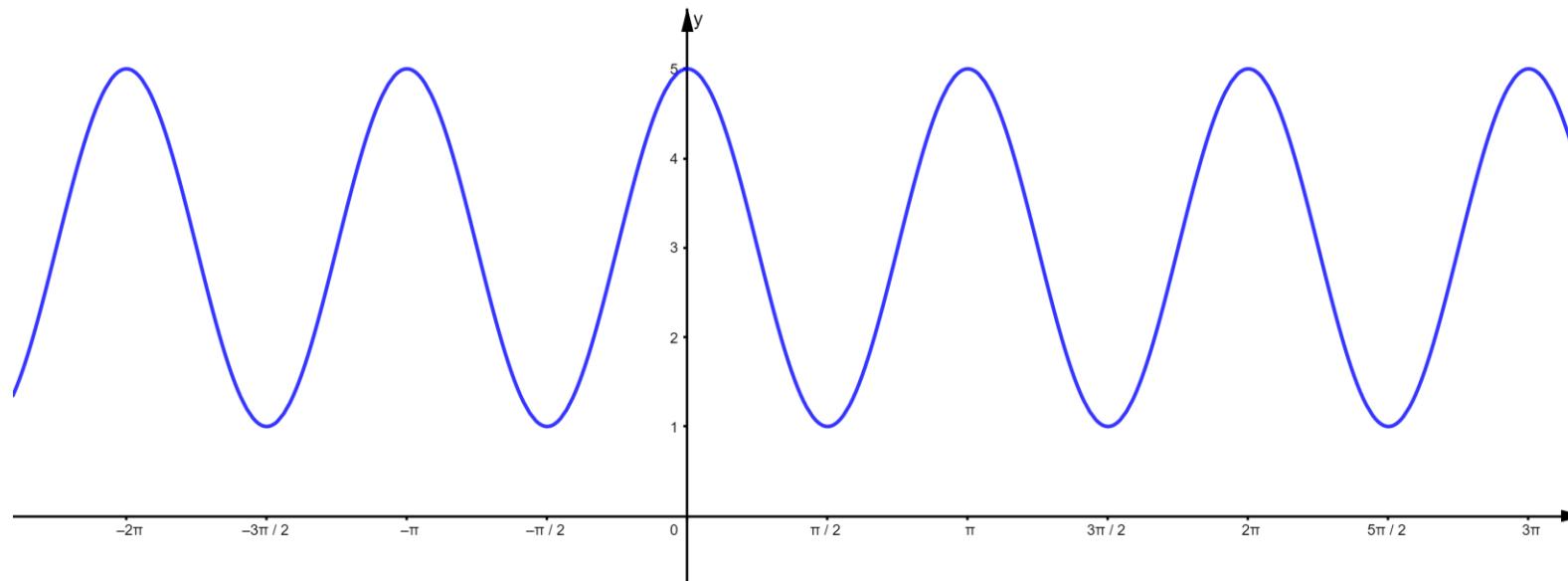
Нахождение нулей, промежутков знакопостоянства и промежутков монотонности функции

$$2. \quad g(x) = 2 \cos 2x + 3$$

Нулей нет, $g(x) > 0$ при $\forall x \in (-\infty; +\infty)$

$y = \cos x \uparrow$ при $x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$

$g(x) \uparrow$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$



Нахождение нулей, промежутков знакопостоянства и промежутков монотонности функции

$$3. \quad v(x) = 2 \left(1 + \cos \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} \right)$$

$$v(x) = 2 + \sin \frac{2x}{3}$$

Нулей нет, $v(x) > 0$ при $\forall x \in (-\infty; +\infty)$

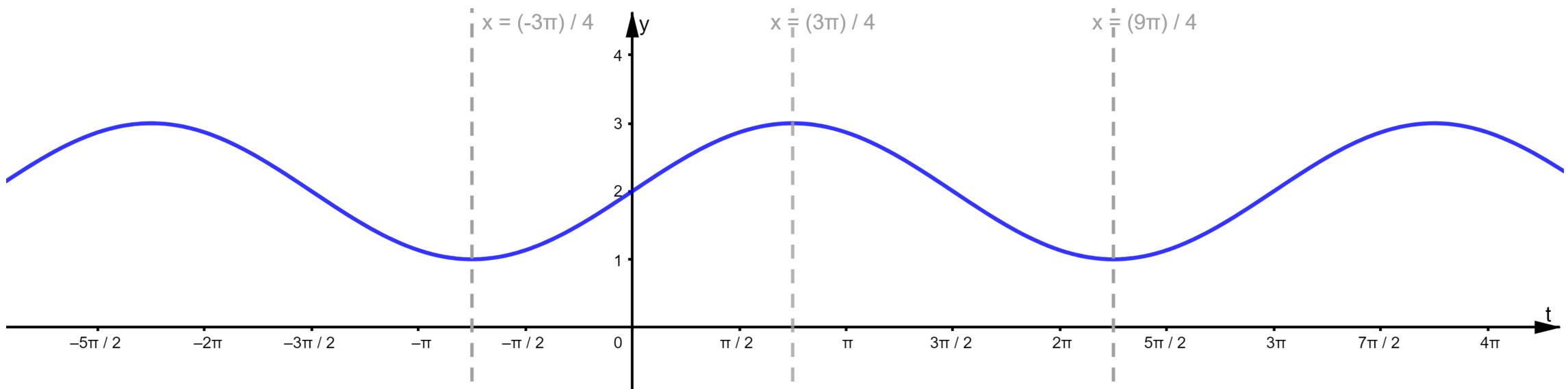
$$y = \sin x \uparrow \text{ при } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \sin \frac{2x}{3} \uparrow \text{ при } x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 3\pi k; \frac{3\pi}{4} + 3\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$v(x) \uparrow \text{ при } x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 3\pi k; \frac{3\pi}{4} + 3\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$v(x) \downarrow \text{ при } x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 3\pi k; \frac{9\pi}{4} + 3\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$$

График функции $v(x) = 2 \left(1 + \cos \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}\right)$



Нахождение нулей, промежутков знакопостоянства и промежутков монотонности функции

$$4. \quad h(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}$$

Нулей нет, $h(x) < 0$ при $\forall x \in (-\infty; +\infty)$

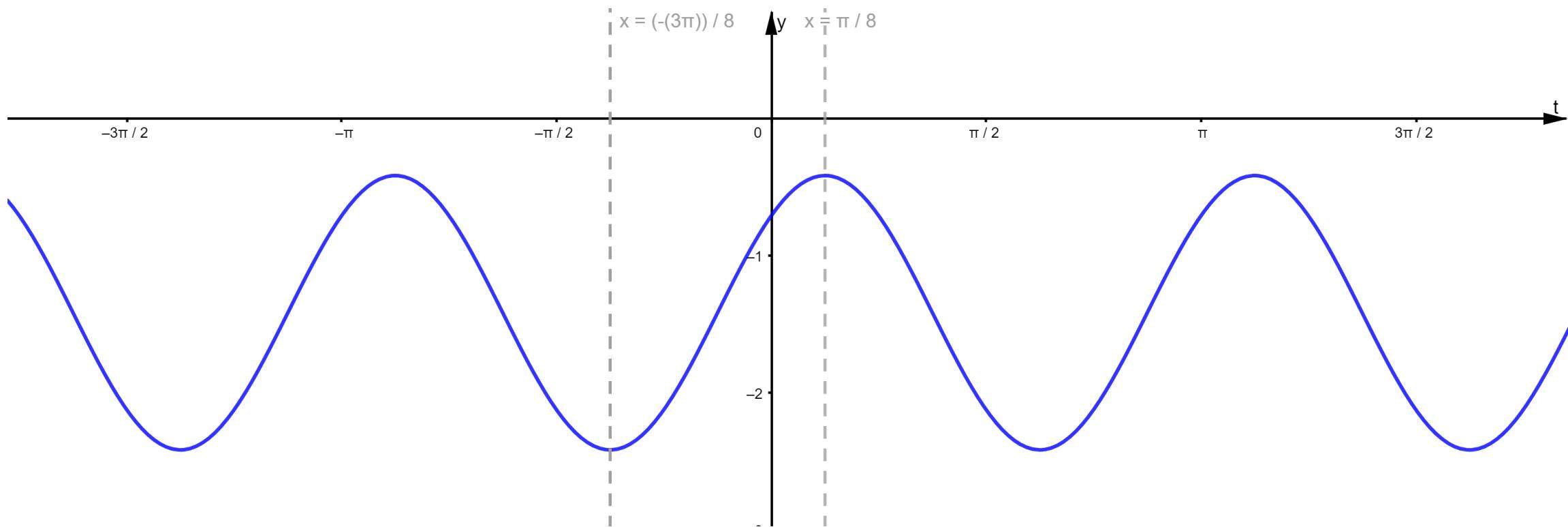
$y = \cos x \uparrow$ при $x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \uparrow$ при $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$

$h(x) \uparrow$ при $x \in \left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$

$h(x) \downarrow$ при $x \in \left[\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{5\pi}{8} + \pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$

График функции $h(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}$



Нахождение нулей и промежутков знакопостоянства

$$5. \quad w(x) = \frac{1}{3} \sin \left(\frac{\pi}{6} - 3x \right)$$

$$w(x) = -\frac{1}{3} \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$3x - \frac{\pi}{6} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

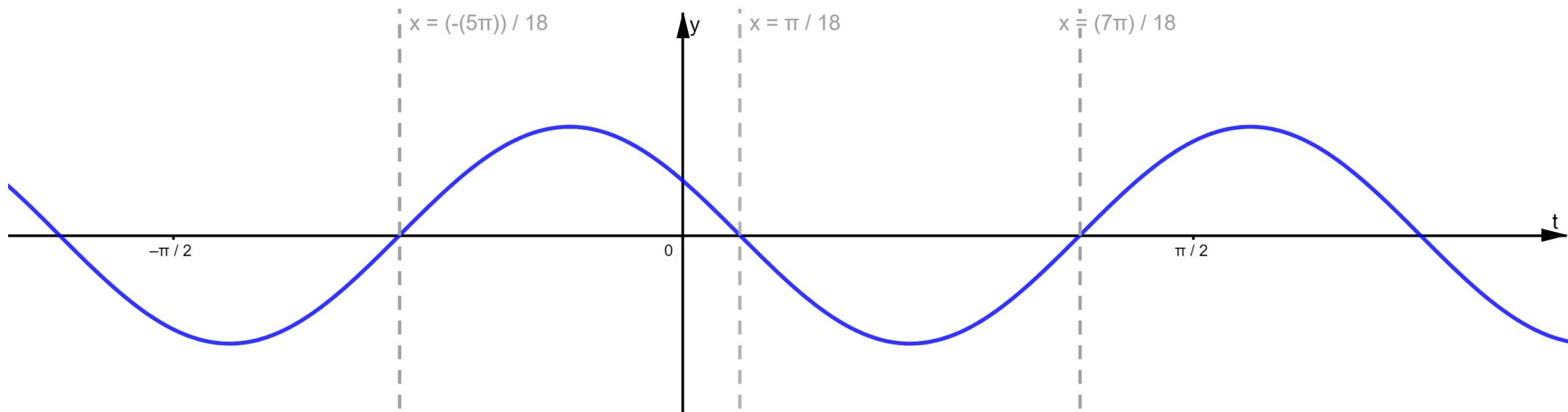
$$3x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Нули функции: } x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$w(x) < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$w(x) > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

График функции $w(x) = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$



Нахождение промежутков монотонности

$$5. \quad w(x) = \frac{1}{3} \sin \left(\frac{\pi}{6} - 3x \right)$$

$$w(x) = -\frac{1}{3} \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$y = \sin x \uparrow$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$

$y = -\sin x \downarrow$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$

$y = -\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \downarrow$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$

$y = -\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) \downarrow$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \right], k \in \mathbb{Z}$

$w(x) \downarrow$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \right], k \in \mathbb{Z}$

$w(x) \uparrow$ при $x \in \left[\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \right], k \in \mathbb{Z}$

График функции $w(x) = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$

