



Волкова Ольга Ивановна

Учитель математики МАОУ «ЛНИП»

Коллоквиумы по математическим дисциплинам в 8 классе

Алгебра. Вопросы к коллоквиуму

1. Понятие одночлена и многочлена. Формулы сокращенного умножения (второго, третьего и n -ого порядка). Разложение многочлена на множители методом группировки, методом выделения полного квадрата, с использованием формул сокращенного умножения. Деление многочленов с остатком. Симметрические многочлены. Однородные многочлены. Примеры.
2. Алгебраические выражения. Целые выражения. Рациональные выражения. Иррациональные выражения. Дробные выражения. Понятие дроби. Сокращение дробей. Приведение дробей к общему знаменателю. Выделение целой части. Примеры. Основное свойство дроби. Алгебраические действия с дробями. Представление дроби в виде суммы двух слагаемых (метод неопределенных коэффициентов).
3. Множества и операции над ними. Введение в теорию множеств: свойства операций над множествами, способы задания множеств. Диаграмма Эйлера. Таблица истинности. Числовые множества. Понятия, применимые к числовым множествам (упорядоченность, ограниченность, конечность, счетность, замкнутость относительно операций, плотность и дискретность). Равномощные множества. Разобрать эти понятия на примере множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
4. Натуральные и целые числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа. Понятие делимости чисел. НОД и НОК. Примеры. Теорема о делении с остатком. Разложение на простые множители. Основная теорема арифметики. Принцип Дирихле. Алгоритм Евклида. Решето Эратосфена. Диофантовы уравнения. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 25.
5. Правильная дробь. Бесконечные периодические десятичные дроби. Смешанная и чистая периодическая дробь. Цепная дробь. Три вида представления рационального числа. Представление рациональных чисел в виде бесконечных периодических десятичных дробей и обратное представление периодической дроби в виде рационального числа. Примеры.
6. Понятие иррационального числа. Два вида представления иррационального числа. Представление иррационального числа как бесконечной непериодической десятичной дроби. Действительные числа. Арифметический квадратный корень и его свойства. Алгебраические действия над квадратными корнями. Избавление от иррациональности в знаменателе. Внесение и вынесения множителей под/за знак корня. Метод вычисления в столбик квадратного корня. Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$. Преобразование двойных радикалов, формула сложного радикала. Примеры.
7. Определение квадратного уравнения. Понятие неполного квадратного уравнения. Типы неполных квадратных уравнений и их решение. Приведенное квадратное уравнение. Решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата и разложением на множители. Формула корней квадратного уравнения и ее вывод. Дискриминант в общем виде и для случая четного второго коэффициента. Квадратный трехчлен. Теорема о разложении квадратного трехчлена на множители. Теорема Виета. Вычисление значений различных симметрических выражений относительно корней квадратного уравнения, не решая его (используя теорему Виета). Примеры.
8. Уравнения высших порядков и их методы решения. Теорема о разложении на множители. Биквадратные уравнения. Уравнения, сводящиеся к квадратным или биквадратным путем замены переменной. Возвратные и обобщенные возвратные уравнения. Дробно-рациональные уравнения. Понятие постороннего корня. Область допустимых значений (ОДЗ) таких уравнений. Метод решения. Примеры.
9. Уравнения с модулем и их решение. Метод интервалов в общем случае и применительно к линейному уравнению с тремя модулями. Частные случаи решения уравнений с модулем

(модуль равен числу, равенство двух модулей, сумма нескольких модулей равна нулю).
Примеры.

10. Текстовые задачи на составление уравнений и систем уравнений. Задачи на движение, работу, проценты, сплавы и геометрические задачи. Примеры. Квадратные уравнения с параметрами. Примеры. Исследование квадратного уравнения и его корней по дискриминанту и коэффициентам, а также при помощи теоремы Виета. Примеры.
11. Системы уравнений. Что является решением системы. Понятие равносильного и неравносильного преобразований. Методы решения для уравнений с одним линейным уравнением, с одним однородным уравнением, с симметрическими уравнениями и метод сведения к таким системам. Метод подстановки, метод сложения, метод замены переменной. Графический способ решения систем уравнений (примеры систем с уравнениями типа прямая, гипербола, окружность заданного радиуса с заданным центром). Метод выделения полного квадрата для нахождения центра и радиуса окружности.
12. Числовые промежутки. Неравенства. Числовые неравенства и их свойства. Действия над неравенствами. Понятие среднего арифметического и среднего геометрического. Доказательство неравенств (метод оценки знака разности, дедуктивный метод, метод от противного, метод усиления). Неравенство Коши и его геометрическая интерпретация, неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
13. Неравенства с одной переменной. Понятие решения неравенства. Множество решений неравенства. Понятия следствия и равносильности неравенств. Линейные неравенства и их решение. Неравенства с модулем. Квадратные неравенства. Метод интервалов при решении квадратных неравенств. Простейшие дробно-рациональные неравенства. Системы неравенств. Примеры.
14. Понятие функции и ее графика. Нули функции, промежутки знакопостоянства. Область значений, область определения. Графики функций: $[x]$, $\{x\}$, $|x|$, $\operatorname{sgn} x$, линейной зависимости, квадратного корня, дробно-линейной и квадратичной функций. Уравнение, задающее окружность. Построение графиков путем преобразования (сдвиг, растяжение, отражение). Графики с модулем и методы их построения для различных типов подмодульных выражений (метод преобразований и метод интервалов).
15. Понятие степени с отрицательным и нулевым показателем. Ее свойства. Алгебраические действия над выражениями, содержащими степени с целыми показателями. Примеры.

Алгебра. Задачи к коллоквиуму

1. Разложите на множители $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$
2. Представьте многочлен $x(x+1)(x+2)(x+3)-15$ в виде произведения двух сомножителей
3. Сократите дробь $\frac{2\sqrt{x}+x-x\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$
4. Упростите выражение $\frac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)} \cdot (b^2+b+ab+a)$
5. Упростите выражение $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)} : \frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}$
6. Упростите выражение $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$

7. Упростите выражение $\frac{4x(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^4 - 1}$
8. Найдите НОД и НОК одночленов $0,7xy^3z^4$ и $0,12x^3y^5z^2$, $12a^2b^4c^3$ и $3a^5b^2c^5$.
9. При каком значении k многочлен $x^4 - kx^3 + 9x^2 + 13x - 10$ делится на $x + 2$.
10. Известно, что $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, найдите вид $f(x)$.
11. Известно, что $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, найдите вид $f(x)$.
12. Вычислите $\sqrt{7 + \sqrt{2\sqrt{6}}} - \sqrt{7 - \sqrt{2\sqrt{6}}}$
13. При делении натурального числа m на 72 в остатке получилось 68. Каков будет остаток, если число m разделить на 24?
14. Найдите остаток от деления 2^{1993} на 5.
15. Найдите все пятизначные числа вида $\overline{36 \bullet 5 \bullet}$, которые бы делились на 36.
16. Покажите, что для любого простого числа n , где $n > 3$, $n^2 - 1$ делится на 24.
17. Покажите, что для любых n $n^5 - n$ делится на 30.
18. Покажите, что при любом нечетном n $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48.
19. При каких целых значениях n дробь $\frac{3n+2}{n-1}$ будет натуральным числом?
20. Покажите, что для любого n дробь $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$ несократима.
21. Покажите, что при любом n дробь $\frac{2n+1}{7n+3}$ несократима.
22. Обратите следующие периодические десятичные дроби в обыкновенные: $0,(357)$; $0,21(357)$; $4,(9)$; $2,(31)$. Прокомментируйте в случае необходимости полученные результаты.
23. Покажите, что $\sqrt{12345,67}$ является иррациональным числом.
24. Если двузначное число разделить на сумму цифр, то в частном получится 6, а в остатке 11. Если разделить на произведение цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найдите это число.
25. Постройте графики функций $y = x^2 + 5|x| + 6$, $y = |x^2 + 5x + 6|$, $y = |x^2 + 5|x| + 6|$. Выпишите в виде промежутков область значений этих функций. Выделите на графике те значения функции, которые она принимает 4 раза (если таковые имеются).
26. Постройте графики функций $y = |-x^2 + 4x| - 5$, $y = |-x^2 + 4|x| - 5|$, $y = |5 - x^2| + 4x$, $y = -x^2 + |4x - 5|$. Выпишите в виде промежутков область значений этих функций. Выпишите в виде промежутков область значений этих функций. Выделите на графике те значения функции, которые она принимает 4 раза (если таковые имеются).
27. Постройте графики функций $y = \frac{3}{|x|}$, $y = -\frac{3}{|x|}$, $y = \frac{x+1}{x}$, $y = x + \frac{1}{x}$
28. Постройте графики функций $y = \frac{2x-3}{4-5x}$, $y = \frac{2|x|-3}{4-5x}$
29. Постройте график функции $y = x|x| + 1$
30. Изобразите геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $x + |x| = y + |y|$
31. Изобразите геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $||x| - |y|| = 1$

32. Изобразите геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $||x| + |y| - 3| = 2$

33. Решите уравнение $3\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$

34. Решите уравнение $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$

35. Решите уравнение $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$

36. Решите при всех значениях m уравнение

$$\frac{x-m}{x-1} + \frac{x+m}{x+1} = \frac{x-2m}{x-2} + \frac{x+2m}{x+2} - \frac{6(m-1)}{5}$$

37. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

38. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases}$$

39. Графически покажите, сколько решений имеет система
$$\begin{cases} x^2 + y = 3 \\ x + y^2 = 4 \end{cases}$$

40. Одна бригада выполняла задание в течение 3,5 дня. Сменившая ее бригада закончила работу за 6 дней. Сколько дней выполняла бы задание каждая из бригад по отдельности, если известно, что вторая бригада выполняла бы задание на 5 дней больше первой?

41. Пристани В и С находятся ниже пристани А по течению реки, соответственно на 30 км и 45 км. Моторная лодка отошла от пристани А, дошла до пристани С, сразу развернулась и пришла к пристани В, затратив 4 ч 40 мин. В другой раз эта же лодка отошла от пристани С, дошла до А, развернулась сразу и пришла к пристани В, затратив 7 ч. Чему равны скорость лодки и скорость течения реки?

42. Два пешехода идут навстречу друг другу их двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то встреча произойдет через 2,5 ч после выхода второго. Если же второй выйдет на 2 ч раньше первого, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первого. С какой скоростью идет каждый пешеход?

43. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40 %. Сколько стали того и другого сорта надо взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30 %?

44. Из сосуда, содержащего 54 л кислоты, вылили несколько литров и налили столько же литров воды, затем вылили столько же, сколько в первый раз, литров смеси, после чего в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 л кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?

45. Три каменщика разной квалификации выложили кирпичную стену, причем первый каменщик работал 6 часов, второй – 4 часа, а третий – 7 часов. Если бы первый каменщик работал 4 часа, второй – 2 часа, а третий – 5 часов, то было бы сделано $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько

часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали вместе одно и то же время?

46. При каких значениях параметра a уравнение $2x^2 + x - a = 0$ имеет хотя бы один общий корень с уравнением $2x^2 - 7x + 6 = 0$?

47. При каких значениях параметра b уравнения $x^2 + (b^2 + 3b + 2)x = 0$ и $x^2 - 2(b + 2)x + b^2 + 5b + 6 = 0$ равносильны? Будет ли равносильной формулировка: «при каких значениях параметра b всякое решение уравнения $x^2 + (b^2 + 3b + 2)x = 0$ является решением уравнения $x^2 - 2(b + 2)x + b^2 + 5b + 6 = 0$ »? Проанализируйте равносильность этих двух формулировок в общем случае (для квадратных уравнений с параметром другого вида),

прокомментируйте так, как считаете нужным, и для подтверждения своего мнения приведите примеры.

48. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x+a}{x+1} + \frac{a-3x}{x-3} = 2$ имеет одно решение?
49. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$ имеет два различных отрицательных корня?
50. Докажите, что $100002^4 > 9997^5$
51. Докажите, что $31^{11} < 17^{14}$
52. Докажите, что $(a+2b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 16$
53. Про числа a, b, c, d известно, что $a+b+c+d=4$ и $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$. Докажите, что $c \leq 2$.
54. Найдите ОДЗ функции $\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{4x^2+4x+1}$
55. Решите графически следующие неравенства, а затем выполните решение аналитически и проверьте себя $x^2 \geq 6-x$, $2-|5-x| < -2x$

Геометрия. Вопросы к коллоквиуму за 8 класс

1. Многоугольники. Определения основных понятий. Теорема о сумме углов выпуклого n -угольника.
2. Параллелограмм. Определение. Свойства и признаки (с доказательством). Симметрия в параллелограмме.
3. Прямоугольник. Определение. Свойства и признаки (с доказательством). Симметрия в прямоугольнике.
4. Ромб. Определение. Свойства и признаки (с доказательством). Симметрия в ромбе.
5. Средняя линия треугольника. Определение и теорема (с доказательством).
6. Средняя линия трапеции. Определение и теорема (с доказательством).
7. Теорема Фалеса (с доказательством) и обобщенная теорема Фалеса (теорема о пропорциональных отрезках) (с доказательством).
8. Теорема Вариньона (с доказательством).
9. Равнобедренная трапеция. Определение и теорема (с доказательством).
10. Теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника (с доказательством).
11. Теорема о биссектрисе внешнего угла треугольника (с доказательством).
12. Углы с соответственно параллельными сторонами. Углы с соответственно перпендикулярными сторонами.
13. Центральная симметрия двух точек. Определение. Осевая симметрия двух точек. Определение. Понятие симметрии для фигуры. Примеры симметрии фигур.
14. Записать алгоритм и сделать схематический рисунок построения четвертого пропорционального отрезка. Записать алгоритм и сделать схематический рисунок деления отрезка на n равных частей.
15. Понятие площади фигуры. Равные, равновеликие и равноставленные фигуры. Формулы площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, прямоугольного треугольника, трапеции, ромба (с доказательством). Формула Герона (без доказательства).
16. Средние в трапеции. Неравенство для них, графическая иллюстрация расположения соответствующих отрезков в трапеции. Вывод формулы для среднего гармонического и среднего квадратического (один из двух способов).
17. Свойства (отношения и равенства) площадей для отдельных фигур (треугольников с равными высотами, основаниями, углами и т.д., не менее 9 свойств).
18. Теорема Пифагора. Прямая и обратная (с доказательством).

19. Подобие треугольников. Определение. Признаки (с доказательством).
20. Подобие в прямоугольном треугольнике. Четыре формулы пропорциональных отношений в прямоугольном треугольнике (с доказательством).
21. Четыре замечательные точки в треугольнике. Свойство биссектрис треугольника (с доказательством).
22. Четыре замечательные точки в треугольнике. Свойство медиан треугольника (с доказательством).
23. Четыре замечательные точки в треугольнике. Свойство высот треугольника (с доказательством).
24. Четыре замечательные точки в треугольнике. Свойство серединных перпендикуляров треугольника (с доказательством).
25. Прямая Эйлера (с доказательством).
26. Теорема Чевы (с доказательством).
27. Теорема Менелая (с доказательством).
28. Основные тригонометрические функции. Определение с использованием прямоугольного треугольника и единичной полуокружности. Основное тригонометрическое тождество (с доказательством). Формула приведения. Значения тригонометрических функций для углов 0, 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150, 180 градусов.
29. Теорема косинусов (с доказательством).
30. Теорема синусов (полная, где есть связь с радиусом, с доказательством).
31. Формулы площади треугольника и выпуклого четырехугольника с использованием тригонометрической функции (с доказательством).
32. Взаимное расположение двух окружностей. Проиллюстрировать каждый возможный случай графически и записать соответствующее соотношение.
33. Общие касательные к двум окружностям. Проиллюстрировать каждый возможный случай графически, и записать, сколько каких касательных получается в каждом случае.
34. Записать алгоритм и сделать схематический рисунок построения касательной к заданной окружности через заданную точку вне круга.
35. Записать алгоритм и сделать схематический рисунок построения внешней касательной к двум заданным окружностям.
36. Записать алгоритм и сделать схематический рисунок построения внутренней касательной к двум заданным окружностям.
37. Центральные и вписанные углы. Определение. Теорема и следствия из нее (с доказательством). Теорема об угле между касательной и хордой (с доказательством).
38. Теорема об угле с вершиной внутри круга (с доказательством). Теорема об угле с вершиной вне круга (с доказательством).
39. Теорема: свойство хорд (с доказательством). Теорема о касательной и секущей (с доказательством). Теорема: свойство секущих (с доказательством).
40. Теорема Птолемея (с доказательством).
41. Формула длины медианы треугольника через три стороны (с доказательством).
42. Формула длины биссектрисы (с доказательством).
43. Формула связи длин диагоналей и сторон параллелограмма (с доказательством).
44. Вписанная и описанная окружность для треугольника и четырехугольника. Определение. Характеристические свойства (с доказательством).
45. Формула зависимости площади треугольника от радиусов вписанной и описанной окружностей. Формула Эйлера (без доказательства).
46. Внеписанная окружность. Определение. Формула площади соответствующего треугольника. Прямая Симпсона (без доказательства). Окружность девяти точек (без доказательства).

Геометрия. Задачи к коллоквиуму за 8 класс

Часть 1.

1. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4 см, а длины непараллельных – 20 и 13 см. Найти высоту трапеции.
2. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной 6 так, что угол в 60° у них общий, и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти стороны треугольника.
3. Периметр параллелограмма равен 90 см, а острый угол равен 60° . Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1:3. Найти стороны параллелограмма.
4. Величина одного из углов параллелограмма равна 60° , а меньшая диагональ равна $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $0,5\sqrt{75}$ см. Найти длины сторон и большей диагонали параллелограмма.
5. В параллелограмме $ABCD$ высота, проведенная из вершины B тупого угла к стороне AD , делит ее в отношении 5:3, считая от вершины D . Найти отношение $\frac{AC}{BD}$, если $\frac{AD}{AB} = 2$.
6. Диагональ прямоугольной трапеции и ее боковая сторона равны. Найти длину средней линии, если высота трапеции равна 2 см, а боковая сторона равна 4 см.
7. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15 см. Разность длин сторон параллелограмма равна 7 см. Найти длины сторон параллелограмма и его диагоналей.
8. Периметр ромба равен 2 см, длины его диагоналей относятся как 3:4. Найти площадь ромба.
9. Площадь прямоугольного треугольника равна $2\sqrt{3}$ см². Найти его высоту, проведенную к гипотенузе, если она делит прямой угол в отношении 1:2.
10. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найти площадь трапеции.
11. Большее основание трапеции имеет длину 24 см. Найти длину его меньшего основания, если известно, что расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 4 см.
12. Высота ромба равна 12 см, а одна из его диагоналей равна 15 см. Найти площадь ромба.
13. В параллелограмме с периметром 32 см проведены диагонали. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 8 см. Найти длины сторон параллелограмма.
14. В трапеции, площадь которой равна 594 м², высота равна 22 м, а разность параллельных сторон равна 6 м. Найти длину каждой из параллельных сторон.
15. Вычислить площадь равнобедренного треугольника, если длина высоты, проведенной к боковой стороне равна 12 см, а длина основания равна 15 см.
16. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

Часть 2.

1. Два угла треугольника равны 40° и 80° . Найти углы треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника.
2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме катетов.
3. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки, равные 24 и 54. Найти катеты этого треугольника.
4. Катет прямоугольного треугольника равен 6, проекция этого катета на гипотенузу равна 2. Найти гипотенузу и другой катет этого треугольника.
5. Катет прямоугольного треугольника равен проекции другого катета на гипотенузу. Найти синус меньшего угла этого треугольника.

6. Найти наименьший острый угол прямоугольного треугольника, если известно, что медиана, выходящая из вершины прямого угла, делит этот угол в отношении 2:1.
7. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Найти расстояние от вершины прямого угла до ближайшей точки вписанной в этот треугольник окружности.
8. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найти тангенс большего острого угла этого треугольника.
9. В $\triangle ABC$ $\angle A = 32^\circ$, $\angle C = 24^\circ$. Окружность с центром в точке B проходит через A , пересекает сторону AC в точке M , сторону BC - в точке K . Найти $\angle KAM$.
10. В $\triangle ABC$ известны стороны $AB = 2$, $BC = 4$. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает прямую AC в точке M , прямую AB - в точке P . Известно, что $AM = 1$. Найти длину отрезка PM .
11. Около треугольника со сторонами 5, 6 и 7 описана окружность. Найти длину хорды этой окружности, делящей пополам среднюю по длине сторону треугольника и проходящей через противоположную этой стороне вершину.
12. Пусть AB - диаметр окружности, C - некоторая точка плоскости. Прямые AC и BC вторично пересекают окружность в точках M и K соответственно. Прямые MB и KA пересекаются в точке P . Найти угол между прямыми CP и AB .
13. В прямоугольном $\triangle ABC$ к гипотенузе AB проведена высота CD . На отрезках CD и DA взяты точки E и F так, что $\frac{CE}{CD} = \frac{AF}{AD}$. Доказать, что прямые $BE \perp CF$.
14. Из точки, расположенной вне окружности, проведены к ней касательная и секущая. Длина касательной равна 6. Секущая высекает на окружности хорду длиной 5. Найти длину отрезка секущей, расположенного вне окружности.
15. Около окружности описана трапеция. Доказать, что концы боковой стороны трапеции центр окружности являются вершинами прямоугольного треугольника. Доказать также, что произведение отрезков боковой стороны, на которые она разделена точкой касания, равно квадрату радиуса окружности.
16. Найти периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда этой окружности, длина которой равна 2, удалена от ее центра на расстояние, равное 3.
17. В $\triangle ABC$ $\angle C = 60^\circ$, радиус описанной окружности равен 2. На прямой AC взята точка D так, что $\angle ADB = 45^\circ$. Найти радиус окружности, описанной около $\triangle ADB$.
18. Доказать, что средняя линия равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна ее боковой стороне.
19. В $\triangle ABC$ известны стороны $AB = \sqrt{17}$, $BC = 4$, $CA = 5$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 1$. Найти $\angle ADB$ и расстояние между центрами окружностей, описанных около $\triangle ADB$ и $\triangle ADC$.
20. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.
21. Найти углы треугольника, если известно, что медиана и высота, выходящие из одной вершины B , делят соответствующий угол на три равные части.
22. Сторона ромба $ABCD$ равна 6, $\angle BAD = 60^\circ$. На стороне BC взята точка E так, что $CE = 2$. Найти расстояние от точки E до центра ромба.
23. В равнобедренном $\triangle ABC$ с основанием AB проведена окружность с центром на AC , проходящая через точку A и касающаяся стороны BC в точке M . Найти $\angle BAM$.
24. Вершина угла, равного 70° , служит началом луча, который образует с его сторонами углы 30° и 40° . Из некоторой точки M плоскости на этот луч и стороны угла опущены перпендикуляры, основания которых - точки A , B и C . Найти углы $\triangle ABC$.

Часть 3.

1. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты этого треугольника.

2. Найти диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.
3. В равнобедренной трапеции основания равны 21 и 9 см, а высота равна 8 см. Найти радиус описанной около этой трапеции окружности.
4. Около окружности диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной 17 см. Найти основания трапеции.
5. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной 4 см проведена медиана боковой стороны. Найти основание треугольника, если медиана равна 3 см.
6. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.
7. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны равна 5 см. Найти длины боковых сторон.
8. Из точки A , не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.
9. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найти отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.
10. Хорда окружности равна 10 см. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой – секущая, параллельная касательной. Найти радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 см.
11. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4 см, а длины непараллельных сторон 20 и 13 см. Найти высоту трапеции.
12. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиуса 2. Найти сторону ромба.
13. В прямоугольном треугольнике вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20 см. Найти площадь треугольника.
14. Один из углов трапеции равен 30° , а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований равно 8 см.
15. Периметр прямоугольного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) равен 72 см, а разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7 см. Найти длину гипотенузы.
16. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 см, а катет равен 10 см.
17. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга. Прямые, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найти радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней окружностей равны 6 и 4 см.
18. На основании равнобедренного треугольника, равном 8 см, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найти радиус окружности, если длина высоты, проведенной на основание треугольника, равна 3 см.
19. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.
20. Внутри круга радиуса 15 см взята точка M на расстоянии 13 см от центра. Через точку M проведена хорда длиной 18 см. Найти длины отрезков, на которые точка M делит эту хорду.
21. Доказать, что радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности выражается формулой $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b – катеты, c – гипотенуза данного треугольника.

Часть 4.

(необязательная, задачи на отдельную оценку, по сложности не упорядочены)

1. В прямоугольном $\triangle ABC$ катеты равны $AB = 7$, $BC = 24$. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружности.
2. К окружности с центром в точке O проведена касательная CD , касающаяся окружности в точке M , и секущая AB , пересекающая окружность в точках A и B соответственно. Точки A и C лежат по одну сторону от прямой OM , а точки B и D лежат по другую сторону от прямой OM . Причем точка C - проекция точки A на прямую CD , а точка D - проекция точки B на прямую CD . $AC = 5$, $BD = 8$. Найти расстояние от точки M до прямой AB .
3. В окружности с центром в точке O центральный угол $\angle AOB = 120^\circ$. Точка C лежит на дуге $\widehat{AB}$, а точка D лежит на хорде AB . При этом $AD = 2$, $DB = 1$, $CD = \sqrt{2}$. Найти площадь $\triangle ABC$.
4. В $\triangle ABC$ со сторонами $BC = 7$, $AC = 5$, $AB = 3$ проведена биссектриса AD . Вокруг $\triangle ABD$ описана окружность, а в $\triangle ACD$ вписана окружность. Найти произведение их радиусов.
5. В $\triangle ABC$ сторона AC не длиннее 3, сторона BC не длиннее 4, а его площадь не меньше 6. Найти радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.
6. Точки P и Q расположены на стороне BC $\triangle ABC$ так, что $BP:PQ:QC = 1:2:3$. Точка R делит сторону AC этого $\triangle ABC$ таким образом, что $AR:RC = 1:2$. Чему равно отношение площади четырехугольника $PQST$ к площади $\triangle ABC$, где S и T - точки пересечения прямой BP с прямыми AQ и AP соответственно?
7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E – пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из $\triangle ABE$ и $\triangle DCE$ равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $AD = 3$. Найти сторону BC .
8. В остроугольном $\triangle ABC$ из вершин A и C на стороны BC и AB опущены высоты AP и CQ . Вычислить длину стороны AC , если известно, что периметр $\triangle ABC$ равен 15, периметр $\triangle BPQ$ равен 9, а радиус окружности, описанной около $\triangle BPQ$ равен $\frac{9}{5}$.