

Алгебра. Вопросы к коллоквиуму

1. Понятие одночлена и многочлена. Формулы сокращенного умножения (второго, третьего и n-ого порядка). Разложение многочлена на множители методом группировки, методом выделения полного квадрата, с использованием формул сокращенного умножения. Деление многочленов с остатком. Симметрические многочлены. Однородные многочлены. Примеры.
2. Алгебраические выражения. Целые выражения. Рациональные выражения. Иррациональные выражения. Дробные выражения. Понятие дроби. Сокращение дробей. Приведение дробей к общему знаменателю. Выделение целой части. Примеры. Основное свойство дроби. Алгебраические действия с дробями. Представление дроби в виде суммы двух слагаемых (метод неопределенных коэффициентов).
3. Множества и операции над ними. Введение в теорию множеств: свойства операций над множествами, способы задания множеств. Диаграмма Эйлера. Таблица истинности. Числовые множества. Понятия, применимые к числовым множествам (упорядоченность, ограниченность, конечность, счетность, замкнутость относительно операций, плотность и дискретность). Равномощные множества. Разобрать эти понятия на примере множеств \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
4. Натуральные и целые числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа. Понятие делимости чисел. НОД и НОК. Примеры. Теорема о делении с остатком. Разложение на простые множители. Основная теорема арифметики. Принцип Дирихле. Алгоритм Евклида. Решето Эратосфена. Диофантовы уравнения. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 25.
5. Правильная дробь. Бесконечные периодические десятичные дроби. Смешанная и чистая периодическая дробь. Цепная дробь. Три вида представления рационального числа. Представление рациональных чисел в виде бесконечных периодических десятичных дробей и обратное представление периодической дроби в виде рационального числа. Примеры.
6. Понятие иррационального числа. Два вида представления иррационального числа. Представление иррационального числа как бесконечной непериодической десятичной дроби. Действительные числа. Арифметический квадратный корень и его свойства. Алгебраические действия над квадратными корнями. Избавление от иррациональности в знаменателе. Внесение и вынесения множителей под/за знак корня. Метод вычисления в столбик квадратного корня. Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$. Преобразование двойных радикалов, формула сложного радикала. Примеры.
7. Определение квадратного уравнения. Понятие неполного квадратного уравнения. Типы неполных квадратных уравнений и их решение. Приведенное квадратное уравнение. Решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата и разложением на множители. Формула корней квадратного уравнения и ее вывод. Дискриминант в общем виде и для случая четного второго коэффициента. Квадратный трехчлен. Теорема о разложении квадратного трехчлена на множители. Теорема Виета. Вычисление значений различных симметрических выражений относительно корней квадратного уравнения, не решая его (используя теорему Виета). Примеры.
8. Уравнения высших порядков и их методы решения. Теорема о разложении на множители. Биквадратные уравнения. Уравнения, сводящиеся к квадратным или биквадратным путем замены переменной. Возвратные и обобщенные возвратные уравнения. Дробно-рациональные уравнения. Понятие постороннего корня. Область допустимых значений (ОДЗ) таких уравнений. Метод решения. Примеры.
9. Уравнения с модулем и их решение. Метод интервалов в общем случае и применительно к линейному уравнению с тремя модулями. Частные случаи решения уравнений с модулем (модуль равен числу, равенство двух модулей, сумма нескольких модулей равна нулю). Примеры.

10. Текстовые задачи на составление уравнений и систем уравнений. Задачи на движение, работу, проценты, сплавы и геометрические задачи. Примеры. Квадратные уравнения с параметрами. Примеры. Исследование квадратного уравнения и его корней по дискриминанту и коэффициентам, а также при помощи теоремы Виета. Примеры.
11. Системы уравнений. Что является решением системы. Понятие равносильного и неравносильного преобразований. Методы решения для уравнений с одним линейным уравнением, с одним однородным уравнением, с симметрическими уравнениями и метод сведения к таким системам. Метод подстановки, метод сложения, метод замены переменной. Графический способ решения систем уравнений (примеры систем с уравнениями типа прямая, гипербола, окружность заданного радиуса с заданным центром). Метод выделения полного квадрата для нахождения центра и радиуса окружности.
12. Числовые промежутки. Неравенства. Числовые неравенства и их свойства. Действия над неравенствами. Понятие среднего арифметического и среднего геометрического. Доказательство неравенств (метод оценки знака разности, дедуктивный метод, метод от противного, метод усиления). Неравенство Коши и его геометрическая интерпретация, неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
13. Неравенства с одной переменной. Понятие решения неравенства. Множество решений неравенства. Понятия следствия и равносильности неравенств. Линейные неравенства и их решение. Неравенства с модулем. Квадратные неравенства. Метод интервалов при решении квадратных неравенств. Простейшие дробно-рациональные неравенства. Системы неравенств. Примеры.
14. Понятие функции и ее графика. Нули функции, промежутки знакопостоянства. Область значений, область определения. Графики функций: $[x]$, $\{x\}$, $|x|$, $\operatorname{sgn} x$, линейной зависимости, квадратного корня, дробно-линейной и квадратичной функций. Уравнение, задающее окружность. Построение графиков путем преобразования (сдвиг, растяжение, отражение). Графики с модулем и методы их построения для различных типов подмодульных выражений (метод преобразований и метод интервалов).
15. Понятие степени с отрицательным и нулевым показателем. Ее свойства. Алгебраические действия над выражениями, содержащими степени с целыми показателями. Примеры.