

Алгебра. Задачи к коллоквиуму

1. Разложите на множители $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$
2. Представьте многочлен $x(x+1)(x+2)(x+3)-15$ в виде произведения двух сомножителей
3. Сократите дробь $\frac{2\sqrt{x}+x-x\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$
4. Упростите выражение $\frac{a-b}{2a-b} - \frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2} : (b^2+b+ab+a)$
5. Упростите выражение $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)} : \frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}$
6. Упростите выражение $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) : \left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$
7. Упростите выражение $\frac{4x(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}$
8. Найдите НОД и НОК одночленов $0,7xy^3z^4$ и $0,12x^3y^5z^2$, $12a^2b^4c^3$ и $3a^5b^2c^5$.
9. При каком значении k многочлен $x^4-kx^3+9x^2+13x-10$ делится на $x+2$.
10. Известно, что $f(x+1)=x^2-3x+2$, найдите вид $f(x)$.
11. Известно, что $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, найдите вид $f(x)$.
12. Вычислите $\sqrt{7+\sqrt{2\sqrt{6}}}-\sqrt{7-\sqrt{2\sqrt{6}}}$
13. При делении натурального числа m на 72 в остатке получилось 68. Каков будет остаток, если число m разделить на 24?
14. Найдите остаток от деления 2^{1993} на 5.
15. Найдите все пятизначные числа вида $\overline{36 \bullet 5 \bullet}$, которые бы делились на 36.
16. Покажите, что для любого простого числа n , где $n > 3$, n^2-1 делится на 24.
17. Покажите, что для любых n n^5-n делится на 30.
18. Покажите, что при любом нечетном n n^3+3n^2-n-3 делится на 48.
19. При каких целых значениях n дробь $\frac{3n+2}{n-1}$ будет натуральным числом?
20. Покажите, что для любого n дробь $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$ несократима.
21. Покажите, что при любом n дробь $\frac{2n+1}{7n+3}$ несократима.
22. Обратите следующие периодические десятичные дроби в обыкновенные: $0,(357)$; $0,21(357)$; $4,(9)$; $2,(31)$. Прокомментируйте в случае необходимости полученные результаты.
23. Покажите, что $\sqrt{12345,67}$ является иррациональным числом.

24. Если двузначное число разделить на сумму цифр, то в частном получится 6, а в остатке 11. Если разделить на произведение цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найдите это число.
25. Постройте графики функций $y = x^2 + 5|x| + 6$, $y = |x^2 + 5x + 6|$, $y = |x^2 + 5|x| + 6|$. Выпишите в виде промежутков область значений этих функций. Выделите на графике те значения функции, которые она принимает 4 раза (если таковые имеются).
26. Постройте графики функций $y = |-x^2 + 4x| - 5$, $y = |-x^2 + 4|x| - 5|$, $y = |5 - x^2| + 4x$, $y = -x^2 + |4x - 5|$. Выпишите в виде промежутков область значений этих функций. Выпишите в виде промежутков область значений этих функций. Выделите на графике те значения функции, которые она принимает 4 раза (если таковые имеются).
27. Постройте графики функций $y = \frac{3}{|x|}$, $y = -\frac{3}{|x|}$, $y = \frac{x+1}{x}$, $y = x + \frac{1}{x}$
28. Постройте графики функций $y = \frac{2x-3}{4-5x}$, $y = \frac{2|x|-3}{4-5x}$
29. Постройте график функции $y = x|x| + 1$
30. Изобразите геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $x + |x| = y + |y|$
31. Изобразите геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $||x| - |y|| = 1$
32. Изобразите геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $||x| + |y| - 3| = 2$
33. Решите уравнение $3\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$
34. Решите уравнение $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$
35. Решите уравнение $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$
36. Решите при всех значениях m уравнение $\frac{x-m}{x-1} + \frac{x+m}{x+1} = \frac{x-2m}{x-2} + \frac{x+2m}{x+2} - \frac{6(m-1)}{5}$
37. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \frac{x+y}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$
38. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases}$
39. Графически покажите, сколько решений имеет система $\begin{cases} x^2 + y = 3 \\ x + y^2 = 4 \end{cases}$
40. Одна бригада выполняла задание в течение 3,5 дня. Сменившая ее бригада закончила работу за 6 дней. Сколько дней выполняла бы задание каждая из бригад по отдельности, если известно, что вторая бригада выполняла бы задание на 5 дней больше первой?
41. Пристани В и С находятся ниже пристани А по течению реки, соответственно на 30 км и 45 км. Моторная лодка отошла от пристани А, дошла до пристани С, сразу развернулась и пришла к пристани В, затратив 4 ч 40 мин. В другой раз эта же лодка отошла от пристани С, дошла до А, развернулась сразу и пришла к пристани В, затратив 7 ч. Чему равны скорость лодки и скорость течения реки?

42. Два пешехода идут навстречу друг другу их двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то встреча произойдет через 2,5 ч после выхода второго. Если же второй выйдет на 2 ч раньше первого, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первого. С какой скоростью идет каждый пешеход?
43. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40 %. Сколько стали того и другого сорта надо взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30 %?
44. Из сосуда, содержащего 54 л кислоты, вылили несколько литров и налили столько же литров воды, затем вылили столько же, сколько в первый раз, литров смеси, после чего в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 л кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?
45. Три каменщика разной квалификации выложили кирпичную стену, причем первый каменщик работал 6 часов, второй – 4 часа, а третий – 7 часов. Если бы первый каменщик работал 4 часа, второй – 2 часа, а третий - 5 часов, то было бы сделано $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали вместе одно и то же время?
46. При каких значениях параметра a уравнение $2x^2 + x - a = 0$ имеет хотя бы один общий корень с уравнением $2x^2 - 7x + 6 = 0$?
47. При каких значениях параметра b уравнения $x^2 + (b^2 + 3b + 2)x = 0$ и $x^2 - 2(b + 2)x + b^2 + 5b + 6 = 0$ равносильны? Будет ли равносильной формулировка: «при каких значениях параметра b всякое решение уравнения $x^2 + (b^2 + 3b + 2)x = 0$ является решением уравнения $x^2 - 2(b + 2)x + b^2 + 5b + 6 = 0$ »? Проанализируйте равносильность этих двух формулировок в общем случае (для квадратных уравнений с параметром другого вида), прокомментируйте так, как считаете нужным, и для подтверждения своего мнения приведите примеры.
48. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x+a}{x+1} + \frac{a-3x}{x-3} = 2$ имеет одно решение?
49. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$ имеет два различных отрицательных корня?
50. Докажите, что $100002^4 > 9997^5$
51. Докажите, что $31^{11} < 17^{14}$
52. Докажите, что $(a + 2b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 16$
53. Про числа a, b, c, d известно, что $a + b + c + d = 4$ и $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$. Докажите, что $c \leq 2$.
54. Найдите ОДЗ функции $\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$
55. Решите графически следующие неравенства, а затем выполните решение аналитически и проверьте себя $x^2 \geq 6 - x$, $2 - |5 - x| < -2x$